

# Allgemeinbildender Stochastikunterricht

HANS SCHUPP, SAARBRÜCKEN

**Zusammenfassung:** Was am gegenwärtigen Stochastikunterricht allgemeinbildend ist bzw. wie man ihn in dieser Hinsicht voranbringen könnte, wird ausgehend von seinen Inhalten, seinen Zielen und fundamentalen Ideen nacheinander untersucht. Dabei wird deutlich, daß ein Rückgang auf das pädagogische Konzept der Bildung und auf deren Grundstruktur unerläßlich ist. Dann aber erweist sich der Beitrag dieses Unterrichts für den Allgemeinbildungsauftrag der Schule insgesamt und des Mathematikunterrichts im Besonderen als

## 1 Ansatz von den Inhalten dieses Unterrichts her

Glücklicherweise wird gegenwärtig nicht mehr bestritten, daß *der sinnvolle Umgang mit Zufalls- und Massenerscheinungen*, mit zu wenig sicherer und zuviel peripherer Information, *unverzichtbarer Bestandteil eines genügend reichen und differenzierten Weltbildes sowie entsprechender Handlungskompetenz* sein muß, ebenso wie die Fähigkeit des einfachen Kontrollierens entsprechender Informationen und Entscheidungen um uns herum; zu beidem sollte in allen Formen und auf allen Stufen unseres Schulwesens angeleitet werden..

Der Arbeitskreis „Stochastik“ der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) hat diese Einsicht kürzlich in seinen „Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts“ (s. Engel 2003) noch einmal deutlich herausgestellt und mit Inhalten versehen. Da der Autor größtenteils damit übereinstimmt (über Details kann man immer streiten), möchte er nicht näher darauf eingehen, sondern nur bedauernd feststellen, daß wir in der breiten Unterrichtspraxis noch weit von diesen Maßgaben entfernt sind, ja daß immer noch viele junge Menschen ohne jegliche stochastische Grundkenntnisse die allgemeinbildende Schule verlassen.

Dies erscheint deshalb so gefährlich, weil die Schulmathematik in ihren traditionellen, deterministischen Kapiteln nolens volens den Anschein erweckt, als könne mit den dortigen Begriffen, Aussagen und Methoden, wenn man sie nur umfassend und sinnvoll einsetzt, Unsicherheit immer in Sicherheit, Ungewissheit in Gewissheit, Vorläufigkeit in Endgültigkeit, Zweifel in Wahrheit überführt werden. Hierdurch wird der weithin vorhandene fatale *Hang, Zufall* (und alles, was

*unverzichtbar.*

**Vorbemerkung:** Das Thema ist ebenso attraktiv wie schwierig. Die in ihm steckenden Begriffe haben einen je eigenen Hof und eine je besondere Geschichte; allesamt sind sie hochproblematisch. Es erscheint angebracht, sich ihm von unterschiedlichen Startpunkten aus zu nähern und auch die Darstellung danach zu gliedern. Aus dramaturgischen Gründen geschieht dies gemäß steigender Bedeutung.

damit zusammenhängt) als *konträr statt als kontradiktorisch zur Sicherheit anzusehen*, verstärkt und hoffähig gemacht, werden diesbezügliche Probleme als vorwissenschaftlich angesehen oder aber in die Spielecke verbannt.

Die Erfahrung zeigt, daß man diese Gefahr nicht allein dadurch schon bannen kann, daß man stochastische Kapitel in geltende Curricula nachträglich einfügt. Die „Empfehlungen“ fordern ganz richtig zur *Vernetzung stochastischer mit deterministischen Aspekten* auf.

Genannt seien (ohne Anspruch auf Vollständigkeit)

- einfache statistische Darstellungen und Methoden (insbesondere der erfreulich voraussetzungslosen, aber dennoch Explorativen Datenanalyse) im gesamten Sachrechnen der frühen und mittleren Schuljahre
- die Monte-Carlo-Simulation beim Flächeninhalt des Kreises und später in der Integralrechnung
- die Analyse und Konstruktion von Pseudo-Zufallsgeneratoren
- Lineare Algebra und Markoff-Ketten
- vor allem aber Funktionen mit stochastischer Komponente (Rauschen) im engen Zusammenhang mit der traditionellen Behandlung elementarer Funktionen.

Zum letzten Punkt der Liste haben Joachim Engel (etwa 1999) und andere in mehreren Publikationen recht eindrucksvoll nachgewiesen, daß und wie die Untersuchung interessanter Streudiagramme den Unterricht beleben und aktualisieren kann. „Vor allem“, weil wir hier einen weiteren wichtigen Beitrag haben zur Ausgestaltung des Funktionsbegriffs als einer Leitlinie des Mathematikunterrichts und zum funktionalen Denken. 100 Jahre nach Felix Klein und der Meraner Konferenz meinen unsere Curricula noch immer die dortigen Forderungen erfüllen zu können durch alleinige Betrachtung von kartesisch notierten

Funktionen einer Veränderlichen und deren Graphen, haben also schon im deterministischen Bereich ein Defizit, vom stochastischen Anteil ganz zu schweigen.

Erfreulich, daß erstmals auch ein SI-Schulbuch (in Band 7) auf Streudiagramme und Ausgleichskurven eingeht (s. Lergenmüller und Schmidt 2000).

Über solche geplanten Vernetzungen hinaus obliegt es den Lehrenden, die Gunst der Stunde zu nutzen. Der Autor hatte im Rahmen des Forschungsprojekts AUGÉ (Aufgabenvariation als Unterrichtsgegenstand) in einer 9. Klasse die Aufgabe „Was kann man über die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sagen?“ variieren lassen. Nach naheliegenden, allesamt deterministischen Variationen (von „Summe“, von „drei“, von „aufeinanderfolgend“, von „natürliche Zahl“) kam plötzlich die Frage „Wie ist das, wenn man sich von drei Leuten je eine natürliche Zahl nennen läßt und davon die Summe bildet?“ Zunächst allgemeines Gelächter, weil man dann vermeintlich keine Aussage mehr machen kann. Ein kleiner Anstoß genügte, um die Wahrscheinlichkeit der Teilbarkeit dieser stochastischen Summe durch 3 zu betrachten und ihr den Wert  $1/3$  zu geben. Als diese Variante dann ihrerseits variiert wurde („Wie ist das mit dem Produkt?“) und zur Lösung  $19/27$  führte, kamen Bedenken auf, ob man so rechnen dürfe, insbesondere, ob man die Wahrscheinlichkeit der Teilbarkeit durch 3 für eine zufällig genannte oder konstruierte Zahl mit  $1/3$  ansetzen dürfe.

Bleiben wir nüchtern. Wir alle wissen nur zu gut: *Inhalte allein garantieren noch keine Bildung.* Vor knapp  $2\frac{1}{2}$  Jahrtausenden hat Aristophanes gesagt: „Menschen bilden heißt nicht ein Gefäß füllen, sondern ein Feuer entfachen.“ Dieses Bild gefällt allerdings auch deshalb, weil Feuer brennbares Material voraussetzt, und seine Intensität von der Qualität des Materials abhängt.

## 2 Ansatz von den Zielen dieses Unterrichts her

Wenn hier von „Zielen“ gesprochen wird, sind aktuelle Nachfolgebegriffe wie „Schlüsselqualifikationen“ und „Kompetenzen“ einbezogen. Man muß nämlich – im Gegensatz zu vielen hochfliegenden Hoffnungen – befürchten, daß auch sie wie die Ziele in den 70er und 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts einem Pervertierungsprozeß unterliegen werden, welcher bereits begonnen hat und wohl noch rascher als damals verlaufen wird.

Der Begriff der *Schlüsselqualifikation* stammt aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung, also nicht aus dem Bereich der allgemeinbildenden Schulen,

und öffnet sich damit den Wünschen der Wirtschaft. Was dabei herauskommen kann, zeigt eine Umfrage zu den wichtigsten Qualifikationen für Akademiker (s. Institut der Deutschen Wirtschaft 1999): An vorderster Stelle steht die Kundenorientierung, erst an achter Stelle die Problemlösungskompetenz und an zehnter Stelle die Selbstständigkeit.<sup>1</sup>

TIMSS und PISA haben den *Kompetenzbegriff* in den Vordergrund gerückt. Das erscheint insofern gerechtfertigt, als damit ein Paradigmenwechsel intendiert ist: Ziele haben die Lehrenden, Kompetenzen (und Qualifikationen) sollen die Lernenden haben. Aber schon geschieht, was damals mit den Zielen geschah: Sie werden klassifiziert, hierarchisiert, herunterdetailliert, mit Aufgaben und endlich mit allumfassenden Tests in Verbindung gebracht (s. etwa MNU 2003 und noch deutlicher Nestle 2003). „*Bildung*“, ein *pädagogischer und vor allem auch ein subjektiv-prozessualer Begriff, gerinnt zu „Bildungsstandards“*, welche säuberlich konstruiert und evaluiert werden müssen, damit man nächstens bei PISA besser abschneidet (s. dazu auch Bodensohn 2003, Müller u.a. 2002 und Hentig 2003, der kritisch von „vermessener Bildung“ spricht).

Es erscheint ratsam, sich statt dessen an Winters bekannten und anerkannten „Allgemeinen Haltungen und Fähigkeiten“ (s. Winter 1972) bzw. „Grunderfahrungen“ (s. Winter 1995) zu orientieren, nicht in dem Sinne, daß konkrete, kurzfristige Ziele daraus abgeleitet werden könnten (das ist grundsätzlich nicht möglich), sondern daß unterrichtliche Bemühungen und Planungen sich davor zu verantworten haben.

„*Der Schüler soll lernen, ... reale Situationen ... zu mathematisieren.*“ bzw.

„*Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen..., aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen*“.

Wenn man dies unter dem Schlagwort „modellieren“ zusammenfaßt, dann darf man sagen, daß der Stochastikunterricht hiervor nicht nur bestehen kann, sondern daß er traditionelle Kapitel der Schulmathematik hierin deutlich übertrifft, von allem Anfang an und bis heute. Viele Kolleginnen und Kollegen, darunter der Autor, haben die Struktur und die Relevanz von Modellierungsprozessen zunächst in der Stochastik kennengelernt und erstmals dort an ihre Schüler, Referendare und Studenten weitervermittelt. Die Fülle der Anregungen in der didaktischen Literatur und mittlerweile auch der Realisierungen in Schulbuch und Unterricht ist beeindruckend. Brauchte man

längere Zeit, Hochschulvorlesungen folgend, einen probabilistischen Vorlauf, um über Trivialstatistik hinauszukommen, so hat die Explorative Datenanalyse seit etwa zwei Jahrzehnten dafür gesorgt, daß der stochastische Lehrgang von Beginn an mit zugleich typischen und verständlichen Situationen, Methoden und Einsichten einsetzen kann (s. etwa Biehler 1982 und Borovcnik 1989). Eine spätere Verschränkung mit einfachen wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden schließt das nicht aus.

Unterricht, der wesentlicher wird, wird immer auch schwieriger. Die Phasen des Modellierens i.e.S., des Interpretierens und Rückkoppelns, also die beidseitigen Übergänge zwischen Mathematik und sonstiger Welt, stellen erhebliche Anforderungen und stehen immer in der Gefahr des Verkürztwerdens. So sind wir heute mehr denn je im Unterricht gehalten, unsere stochastischen Vorgehensweisen und Resultate sowie diejenigen anderer kritisch zu betrachten, sie eher als Entscheidungshilfen denn als Entscheidungen anzusehen. Wir dürfen nicht zulassen, daß aus der Kleinheit der Chancen beim Lottospielen „geschlossen“ wird, daß man darauf verzichten sollte. Und wir sollten, um ein weiteres Beispiel zu nennen, herausarbeiten, daß die allwöchentlichen Befragungen zur Parteienbeliebtheit nicht so sehr ein Triumph der Befragungstechnik oder gar Zeichen einer offenen Demokratie sind als vielmehr eine eminente Bedrohung ihrer Handlungsfähigkeit.

Davis und Hersh (1986) widmen ein ganzes Kapitel der „Social Tyranny of Numbers“, dem stellen sie einen Abschnitt „The Stochastized World: A Matter of Style?“ voran. In der Tat wäre eine „World according to Mathematics“ eine ebensolche Verarmung wie die „World without Mathematics“. Darf man aus dem Prozentsatz der Abiturienten am Jahrgang eines Landes auf die Qualität seines Bildungssystems schließen, wie jüngst von der OECD geschehen? Gescheiter und gescheiter, fehlender und fehlerhafter, sinnvoller und exzessiver Umgang mit Daten, Datenphobie, Datenmißbrauch, Datenkompetenz, Datenphilie und Datenterror liegen nahe beieinander (s. Köhler 1992). Hier hätten die o.a. Empfehlungen wohl noch deutlicher sein können.

„Der Schüler soll lernen, zu argumentieren.“  
bzw.

„Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen lernen und ... begreifen.“

Man wird diese Zieldimension wohl auch als Mahnung auffassen müssen, den Mathematikunterricht nicht durchweg – etwa nach anglikanischem, niederländischem und skandinavischem Vorbild – unter dem Anwendungsaspekt durchzuführen, sondern die janusköpfige Struktur der Mathematik (weltzugewandt, weltabgewandt) aufscheinen zu lassen. Für die Stochastik heißt das, daß man probabilistische Anteile nicht nur wegen der sie benötigenden schließenden Statistik behandeln sollte, sondern ihnen einen angemessenen Eigenwert geben muß (s. dazu auch Kütting 1990). Wir haben nicht nur an den „homo faber“, sondern auch, und hier recht direkt, an den „homo ludens“ zu denken. Das ist natürlich kein Plädoyer für eine bloß axiomatisch gelehrte Wahrscheinlichkeitsrechnung und für ein Ausruhen auf deterministischen Teilen dieser Theorie, etwa der Kombinatorik. Im übrigen: Spiele gibt es auch in unserer Umwelt, sie sind ein Bestandteil unserer Kultur, und bekanntlich kann so mancher wirtschaftliche Prozess als Spiel interpretiert werden.

„Der Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten.“ bzw.

„In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, erwerben.“

Ist man mit Thomas Mann der Ansicht „Phantasie haben, heißt nicht, sich irgend etwas ausdenken, sondern sich aus den Dingen etwas machen“<sup>2</sup>, geht also von sachgebundener Phantasie aus, so darf man der grundsätzlichen Überzeugung sein, daß für deren Wecken und Fördern der Mathematikunterricht mit *allen* seinen Teilen in besonderer Weise geeignet ist. Gelten muß dabei allerdings, daß dort Mathematik nicht vorgesetzt, sondern betrieben wird und im Betreiben entsteht.

Es gilt aber auch, und wird durch vielfältige Erfahrungen in Schule und Hochschule bestätigt, daß *stochastische Aufgaben kreative Prozesse in besonderer Weise ermöglichen* können, weil sie

- selbst als geschlossene Probleme oft mehrere Lösungswege erlauben (z.B. bei der Berechnung von Sekundärwahrscheinlichkeiten)
- zu naheliegenden Variationen einladen (z.B. beim Ziehen von Kugeln aus einer Urne oder bei der Gestaltung von Spielen)
- bei offenen Problemen eine Vielzahl von durchaus unterschiedlichen Interpretationen hervorrufen (s. o.a. Phasen des Modellierens).

Rückschauend wird erstmals deutlich, daß allgemeinbildende Wirkungen stochastischer Unterweisung sich nicht schon durch direktes Anstreben der genannten Ziele ergeben, sondern einer reflektierenden Grundhaltung bedürfen (s. Abschnitt 5).

### 3 Ansatz von den charakteristischen Ideen dieses Unterrichts her

Es heißt hier „charakteristisch“<sup>3</sup> und nicht etwa „fundamental“, weil eine fundamentale Idee sich u.a. durch *Ubiquität* (Weite) auszeichnet, also die gesamte Mathematik erfaßt. Solche Ideen zeigen sich demnach auch im Stochastikunterricht, etwa das Ordnen, Zuordnen, Zählen, Messen, Symmetrisieren, Approximieren, Optimieren u.a.. Darauf soll nicht näher eingegangen werden. Betrachten aber muß man – zunächst nur für die Wahrscheinlichkeitstheorie – diejenigen beiden Ideen, die von Stochastikern selbst immer wieder genannt worden sind: das *Schätzen* und das *Testen*. In der Tat erfüllen diese beiden Aktivitäten die weiteren Kriterien für solche Ideen:

- *Historizität*: Schätzen und Testen spielen von Beginn stochastischer Bemühungen an eine bedeutende Rolle
- *Typizität*: Sie geben Aufschluß über deren Wesen
- *Aktualität*: Es sind auch heute noch praktizierte, unverzichtbare Maßnahmen
- *Archetypizität*: Dergleichen spielt auch außerhalb und vor der wissenschaftlichen Stochastik eine lebenswichtige Rolle (etwa in Gestalt des Vermutens bzw. des Überprüfens)

Übrigens: So wie diese beiden Alltagsstrategien sich einerseits entgegenlaufen, andererseits aber auch ergänzen, also komplementär sind, so tun es auch die beiden charakteristischen Ideen. Von daher ist der Streit um den Bayes-Ansatz schwer zu verstehen. Wir brauchen das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten ebenso wie ihr Testen; beides ist letztlich ein Urteilen.

*Nun wird in unserem gegenwärtigen Stochastikunterricht durchaus getestet und geschätzt. Aber zu spät und zu isoliert.* Wichtige Ideen sollten in der Schule spiralig entwickelt werden und als Leitlinien quer zu den Jahressedimenten der Curricula den Unterricht durchziehen (somit auch zum kumulativen Lernen beitragen). Die beiden genannten *Aktivitäten müssen* also unbedingt *früher und nebeneinander einsetzen*, mit durchschaubaren, aber fragwürdigen Situationen. Hierzu gibt es Pionierarbeiten (so etwa von A. Engel, Borovcnik, Riemer, Strick), doch ist die Unterrichtspraxis bisher kaum davon berührt worden. Wenn doch wenigstens im Zusammenhang mit der bedingten Wahrscheinlichkeit der Satz von Bayes als Umkehrung der bisherigen Denkrichtung, als stochastisches Schließen zurück von einer Wirkung auf mögliche Ursachen herausgestellt und in einer dritten Pfadregel festgehalten würde.<sup>4</sup> Überhaupt scheint, daß diesem für Lernende zunächst schwierigen Begriff noch nicht

die notwendige Lern- und Übungszeit eingeräumt wird (s. dazu auch Buth 2003<sup>5</sup> und Vancsó 2003).

Hier soll den beiden klassischen Ideen noch eine „Hilfsidee“ zur Seite gestellt werden, die in der stochastischen Praxis wie Lehre eine immer größere Bedeutung erlangt und inzwischen unverzichtbar geworden ist: die *Simulation* (s. etwa Trauerstein 1990 oder Wollring 1992 für gute Beispiele, Biehler 2003 für eine Gesamtbeurteilung). Da sind wir unterrichtlich schon weiter: Simuliert wird von Beginn an, zunächst mit Leitexperimenten (Würfel, Münze, Urne mit Bällen, Glücksrad, Galton-Brett, Wahrscheinlichkeitsabakus,...), auf die man sich bei Bedarf beziehen kann, später dann mit Zufallszahlen und schließlich mit computergenerierten Pseudozufallszahlen. Simulationen entlasten von Kalkül und großenteils auch von Theorie, entheben den Simulator aber keineswegs des vorgängigen Modellierens und nachgängigen Interpretierens. Daß sie Zufall unmittelbar, per Experiment erleben lassen und stimmige Grundvorstellungen schaffen können, ist ein wichtiger Nebeneffekt (s. Abschnitt 5).

Im deskriptiv-statistischen Bereich seien als charakteristische Ideen *das Mustererkennen* und *das Rafften* (als zugehörige Archetypen *das Strukturieren* und *das Vereinfachen*) genannt. Für den fachlichen Hintergrund wird dabei auf Wolpers und Götz (2002), für die Kennzeichnung dieser Ideen und für didaktisch-methodische Details auf Kröpfl u.a. (2000), für die Hintergrundphilosophie auf Goethe verwiesen: „Und was in schwankender Erscheinung schwebt, befestiget mit dauernden Gedanken.“<sup>6</sup>

Auch jetzt läßt sich eine zentrale Hilfstätigkeit ausmachen, welche spätestens durch die Explorative Datenanalyse unentbehrlich geworden ist: das sinnvolle *Darstellen* (nicht nur graphisch zu verstehen) des anfänglichen Datenmaterials. Die Literatur ist und auch schon einige Schulbücher sind voller guter Beispiele. Früher Einsatz, bereits in der Grundschule und in der Verschränkung mit qualitativen probabilistischen Überlegungen, sollte eine Selbstverständlichkeit sein (s. etwa Winter 1976, aber auch Engel 2003).

Mit der Betonung charakteristischer Ideen bzw. strukturierender Leitlinien über die Zielebene hinaus ist man im Bemühen, allgemeinbildenden Stochastikunterricht zu charakterisieren, insofern wieder einen Schritt vorangekommen, als dieser Unterricht durch sie wesentlicher, zugleich wissenschafts- und praxisnäher, durchsichtiger und aktivitätsreicher werden kann. Bewirkt er aber auch Bildung? Dazu müssen wir denn doch diesen Begriff selbst unter die Lupe nehmen.

## 4 Ansatz von der Pädagogik her

Bildung ist bekanntlich eine Wortschöpfung im deutschen Sprachraum, die sich in der Zeit des Neuhumanismus vollzogen hat, angestoßen durch Herder und Fichte, literarisch begleitet durch die Bildungsromane von Wieland und Goethe, später von Stifter, Keller, Jean Paul, Raabe u.a., und vorläufig gipfelnd in den Überlegungen Wilhelm von Humboldts. Dieser verstand *Bildung* immer als *Allgemeinbildung, mit drei Bedeutungen von allgemein* (wie sie später Klafki 1985 noch einmal hervorgehoben hat):

- im Hinblick auf die Totalität der Welt  
Der Mensch muß versuchen, „soviel Welt, als möglich, zu ergreifen, und so eng, als er nur kann, mit sich zu verbinden.“<sup>7</sup>
- auf die Gesamtheit der Gesellschaft  
„Jeder gestaltet in sich die Menschheit, wie die Menschheit ihn gestaltet.“<sup>7</sup> und schließlich
- auf das Wie der Begegnung von Mensch und Welt im Medium des Allgemeinen: „... einmal alles aus einem ursprünglichen Prinzip abzuleiten, ferner alles einem Ideal zuzubilden, endlich jenes Prinzip und dies Ideal in eine Idee zu verknüpfen.“<sup>8</sup>

Daß diese drei Bedeutungen schon im Laufe des 19. Jahrhunderts zurücktraten, ja auf verschiedenste Weise umgangen worden sind (formale versus materiale, geistes- versus naturwissenschaftliche, höhere versus Volksbildung, Verstandes- versus Herzensbildung) und auch weiterhin mißachtet werden (der Niedergang des Fernsehens zum Medium des Besonderen, nämlich zu Klatsch und Tratsch, ist nur ein – allerdings besonders trauriges – Beispiel) kann den Autor nicht hindern, Allgemeinbildung und Bildung synonym zu verwenden, hierin Hentig (1996) folgend und anders als Heymann (1996).

Nimmt man Humboldts Bildungsauffassung ernst, so wird zweierlei deutlich. Erstens: *Auf keinen Wirklichkeits- und Wissenschaftsbereich kann eine allgemeinbildende Schule a priori verzichten*, wenn sie ihre im Adjektiv festgehaltene Aufgabe erfüllen will (insbesondere auch nicht auf Mathematik sowie auf „das Reich des Zufalls“, s. Gigenzer 1999). Zweitens: *Ein einzelner solcher Bereich kann höchstens dazu beitragen*, aber nicht direkt bewirken, *daß Bildung geschieht*. „Mathematik als Bildungsgrundlage“ (s. Meschkowski 1965) genügt nicht.

Es gibt unzählige Versuche, Bildung zu definieren bzw. den gebildeten Menschen zu charakterisieren. Hier wird derjenige des Deutschen Ausschusses für das Erziehungs- und Bildungswesen favorisiert, der in seinen „Empfehlungen und Gutachten“ von 1966 formuliert: „Gebildet ist, wer in der ständigen Bemühung lebt, sich selber, die Gesell-

schaft und die Welt zu verstehen und diesem Verstehen gemäß zu handeln“. Deshalb, weil er die o.a. Dimensionen von Allgemeinheit berücksichtigt, auf die Bildungsbedürftigkeit des Menschen hinweist und gleichzeitig heraushebt, daß Bildung als personenbezogener Prozeß grundsätzlich (nicht de facto) unabhängig ist von Schule, Erziehung, Ausbildung und Kenntnisstand, vom Bestehen von Tests ganz zu schweigen (s. dazu auch Hentig 1996).

Wenn Bildung also nicht operationalisierbar ist, wenn sie ein scheues Reh ist, das man leichter töten als einfangen kann, *hat Unterricht ein grundsätzliches Problem. Wie stiftet er Bildung, d.h. wie bringt er solche Bildungsprozesse in Gang und fördert sie?*

Heymann (1996) gibt einen Orientierungsrahmen in Gestalt von sieben dialektisch aufeinander bezogenen *Aufgabenbereichen* der allgemeinbildenden Schule. Auf Lebensvorbereitung, Weltorientierung und kritischen Vernunftgebrauch wurde schon eingegangen. Stochastikunterricht leistet hierzu gute Dienste (natürlich ohne diese „Tugenden“ direkt bewirken zu können).

Bei den ethisch-sozial ausgerichteten Aufgabefeldern Verantwortungsbereitschaft, Verständigung und Kooperation<sup>9</sup> sowie Stärkung des Schüler-Ichs werden die Grenzen schulischen Einwirkens besonders deutlich. Für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich ist klar, daß sich hier indirekte Einflußnahmen nicht so sehr über die Inhalte, nicht einmal über die Ziele ergeben als vielmehr über das Wie des Lehrens und Lernens, über die Unterrichtskultur. Offener, aktivitätsorientierter Unterricht mit Phasen der Selbstregulation ist zweifellos förderlich. Und da braucht sich die Stochastik mit ihren herausfordernden Problemen, konkurrierenden Methoden und heterogenen Lösungen keineswegs zu verstecken. Man denke z.B. nur an das gemeinsame Durchführen einer statistischen Untersuchung mit all ihren planerischen, praktischen und evaluierenden Phasen (s. etwa Biehler und Kombrink 1999). Hierbei kann in der Tat geschehen, was von Hentig als Losung für jedes pädagogische Bemühen vorgegeben hat: „die Menschen stärken und die Sachen klären“ (s. Hentig 1996).

Noch ein Wort zur Stiftung kultureller Kohärenz, und zwar zu ihrer diachronen, d.h. zeitlichen Komponente. Gegenüber dem radikalen Konstruktivismus ist festzuhalten, daß Kultur ohne Tradition nicht möglich ist, daß Sinn zwar nicht direkt gelehrt werden kann, weil er im einzelnen Menschen „gebildet“ wird, daß aber Sinnfindung durchaus (und nicht zuletzt) auch stattfinden kann

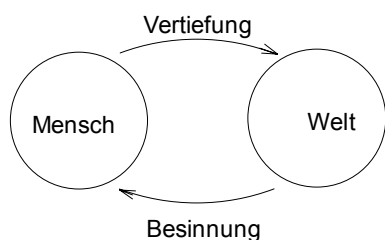
in der Auseinandersetzung mit Sinnmanifestationen anderer und früherer Personen bzw. Zeiten. Goethe<sup>10</sup>: „Was Du ererbt von Deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen.“ Es liegen gute Erfahrungen vor mit der Behandlung historischer stochastischer Probleme und ihrer zeitgebundenen Lösungen. Glücklicherweise haben wir dazu eine reiche Literatur, hauptsächlich wahrheitstheoretischer, neuerdings aber auch statistischer Art (s. Barth und Haller 1983, Ineichen 1987, 1992 und 1995, Haller 1988, Wirths 1999, Gigerenzer 1999 u.v.a.)

Anders als Heymann geht von Hentig (1996) vor. Auf der Suche nach möglichen Maßstäben für sich vollziehende Bildung der Lernenden kommt er zu insgesamt zehn *Bildungsanlässen*, d.h. Situationstypen, die ihm dafür besonders günstige Voraussetzungen zu bieten scheinen. Und er meint, daß die Fächer der herkömmlichen Schule brauchbare Anlässe für Bildung sind. Das geschieht etwas kurz und kasuistisch, leitet jedoch über zum letzten und wichtigsten Punkt.

## 5 Ansatz von der Grundstruktur der Bildung her

Theodor Ballauff (o.J.) hat nachweisen können, daß Aussagen über eine solche Struktur die deutsche und europäische Philosophie und Pädagogik, ja sogar Belletristik, in zahlreichen ihrer hervorragendsten Vertreter vom 17. Jahrhundert an (Leibniz) bis zur Gegenwart (Heidegger, Piaget) durchziehen. Danach stehen Mensch und Welt in einem palintropischen, d.h. in einem in sich zurücklaufenden, fortwährendem Einwirkverhältnis, wobei die diallel gefügten, einander ablösenden und ergänzenden *Akte der Vertiefung* (als Einlassung des Menschen in die Welt außerhalb) und *Besinnung* (als Rücknahme aus dieser Welt und distanzierender Reflexion) *einen Prozeß konstituieren, in dessen Verlauf Mensch und auch Welt zu sich selbst kommen* (s. Figur)<sup>11</sup>. Der Mensch besinnt sich und be-sinnt die Welt. Goethe<sup>12</sup>: „Der Mensch kennt nur sich selbst, in sofern er die Welt kennt, die er nur in sich und sich nur in ihr gewahrt wird.“

Auslöser und Betreiber dieser Palintropie (heute



Prozeß, in dessen Verlauf Mensch und Welt zu sich selbst kommen

würde man eher von einer Spirale reden) *ist der bildungsbedürftige und darum selbsttätige Mensch*. Wie vielfach und vielfältig, wie intensiv sie durchschritten wird, ist subjektiv verschieden: es gibt unterschiedliche Bildungsverläufe.

*Erst Be-sinnung schafft Sinn, Besonnenheit und Gesinnung* (Herder). Sie setzt Vertiefung als Hinwendung zur Welt in möglichst vielen ihrer Erscheinungs- und Darstellungsformen voraus, weil sonst die Gefahr der Oberflächlichkeit, ja des Spintisierens besteht. Vor obigem Goethezitat heißt es: „Hiebei bekenn' ich, daß mir von jeher die große und so bedeutend klingende Aufgabe: erkenne dich selbst, immer verdächtig vorkam, als eine List geheim verbündeter Priester, die den Menschen durch unerreichbare Forderungen verwirren und von der Tätigkeit gegen die Außenwelt zu einer innern falschen Beschaulichkeit verleiten wollten.“ Andererseits käme es ohne Phasen der Besinnung zur bloßen Benommenheit, ja Verlorenheit.

Diese notgedrungen recht summarisch vorgestellte Grundstruktur ist der Hintergrund auch noch für wichtige Erkenntnisse und Forderungen in der Gegenwart. Wagenscheins und Wittenbergs Bemühungen (exemplarisches bzw. genetisches Prinzip) verstehen sich von daher als Mahnungen und Wege zur Besinnung. Und wenn der späte Wagenschein fruchtbaren Unterricht mit einer Brücke vergleicht, die aus verbindenden Bögen und stützenden Pfeilern besteht, dann hat er eine wunderschöne Metapher gefunden für die Notwendigkeit beider Diallelen, für lehrerbestimmte, informierende ebenso wie für aktivitätsorientierte und (nach)forschende Unterrichtsphasen, für Instruktion und Konstruktion (s. dazu auch Weinert und Helmke 1995).

Nun ist es ein offenes Geheimnis, daß *im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht* solche *sinnstiftenden Phasen allzu selten* sind. Sicher schon deshalb, weil übervolle Stoffpläne nicht mehr die erforderliche Muße für das „Nachdenken als Ordnen des Denkens“ (Metakognition) im Anschluß an das „Denken als Ordnen des Tuns“ (Kognition, s. Aebli 1980/81) gestatten. Vielleicht aber auch, weil wir, d.h. die Fachlehrkräfte, nur zu gerne im höchst interessanten Einarbeiten verbleiben (s. dazu Diederich 1980 und Köhler 1996), und weil wir meinen, die Schwierigkeiten der Lernenden beim Einlassen in den Stoff (der ja Welt repräsentiert) würden Reflexionen darüber verbieten, während sie doch für ein Weiterkommen auch im Vertiefen gemäß der Grundstruktur geradezu notwendig sind.

Im Gegensatz zu solcher landläufigen Praxis *bie-*

tet der Mathematikunterricht viele und vielfältige Gelegenheiten zum Nach-Denken, in bezug auf erhaltene Lösungen, angewandte Methoden und Medien (insbesondere auch Computer), begangene Fehler, Relevanz von Aufgaben und nicht zuletzt in bezug auf den stattgefundenen Unterricht schlechthin (s. dazu Köhler 1993). Sie zu nutzen setzt bei den Lehrenden neben Engagement und Kompetenz (sowie guter Unterrichtsatmosphäre) vor allem auch ein Gespür für den günstigen Moment voraus, etwa vor und nach Klassenarbeiten, bei massiv auftretenden Schwierigkeiten, aktuellen Informationen, widersprüchlichen Meinungen, Unzufriedenheit der Lernenden mit dem Lehrstoff usw.

All dies gilt wohlgerne für jeden Mathematikunterricht gleichwelcher Art und Stufe, und also auch für den Stochastikunterricht. Unsere mathematikdidaktischen Zeitschriften geben ausgezeichnete Beispiele aus dessen erlebter Praxis. Ein weiteres Angebot: Am 25.10.2003 berichtete die Saarbrücker Zeitung in einem „Mit Mathematik gegen Steuer Sünder“ überschriebenen Artikel, daß Steuerbeamte neuerdings spezielle Software benutzen, um die von Firmen angegebenen Bilanzzahlen auf Stichhaltigkeit zu überprüfen. Wer schummelt, trägt Zahlen ein, die er sich selbst ausgedacht hat, weshalb die Häufigkeit der Ziffern signifikant von der Gleichverteilung (im Artikel steht „Normalverteilung“(!)) abweiche. Was ist davon zu halten? (Stichworte: Gleichverteilung (?); Dominanz von 9,5,0 bei Endziffern von Preisen; Benford-Gesetz; Chi-Quadrat-Test u.a.)

Für den *Stochastikunterricht* gilt aber darüber hinaus, daß man wegen der spezifischen Beschaffenheit von Zufalls- und Massenerscheinungen sowie ihrer Bewältigung um grundsätzliche, immer wieder aufbrechende Diskussionen nicht herumkommt. Das macht ihn zwar schwierig, aber dafür auch *in besonderer Weise „bildend“*. Schon deshalb darf er in einer allgemeinbildenden Schule nicht fehlen.

Zum Abschluß seien einige solche motivierenden „Anlässe“ mit typischen Beispielen angeführt, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, und eingedenk der Tatsache, daß sie sich vielfältig verschränken und durchaus zu übereinstimmenden stochastischen Kenntnissen und Einsichten führen können. Erfreulicherweise bietet sie im Ansatz auch ein neueres Schulbuch (s. Strick 2003) mit seinen „Blickpunkten“ und „Exkursen“.

#### a) Behandeln historischer Initialprobleme

etwa zu Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

- problème des dés, problème des partis
- innerhalb der Statistik: l'homme moyen

- im Zuge aufkommender Simulationen: Konstruktion von Zufallsziffern

Wichtig dabei ist, daß diese Probleme im historischen Kontext erscheinen, so daß die aufgetretenen Meinungsunterschiede nicht nur aus heutiger Sicht beurteilt werden. Wie sehr auch Experten hier noch streiten können, zeigt die Kontroverse Borovcnik-Schupp im JMD (s. Borovcnik 1986a, b und Schupp 1986).

#### b) Eingehen auf Primärintuitionen

Darüber gibt es eine ausgedehnte psychologische und inzwischen auch mathematikdidaktische Forschung (s. etwa Fischbein 1975 und Kapadia und Borovcnik 1991). Gemeinsame Überzeugung ist, daß sie explizit gemacht und, wo erforderlich, durch geduldiges Eingehen auf subjektive Voreinstellungen in stimmige Sekundärintuitionen (heute sagt man wohl: Grundvorstellungen) überführt werden müssen, weil sie sonst jede noch so ausgedehnte schulische Instruktion überleben und im Zweifelsfalle dominieren. Besonders gilt dies für so starke Strategien (Heuristiken) wie Repräsentativität, Verfügbarkeit, Gesetz der kleinen Zahlen, die ja auch in uns noch weiterwirken und wo wir jedesmal eines „rationalen Rucks“ bedürfen, um sie abzuschalten. Für ein interessantes Beispiel sei auf Erfahrungen mit dem Galton-Brett in der Hauptschule hingewiesen (s. Schupp 1978 und 1985). Andererseits sind intuitive Zugänge zu zentralen stochastischen Konzepten unverzichtbar (s. Borovcnik 1992).

Hier werden wir erstmals damit konfrontiert, daß prinzipielle Schwierigkeiten bei der Vertiefung nicht durch einen einzigen Akt der Besinnung überwunden werden können, sondern mehrmaliger, manchmal sogar durchziehender Läufe durch die Diallelen bedürfen.

#### c) Ringen um Grundbegriffe

Ich nenne: Zufall, Chance, Risiko, Wahrscheinlichkeit (das englische chance kann all das heißen, zudem auch noch Glück), Erwartung, Unabhängigkeit. Für sie alle gilt, daß sie zunächst einmal häufig benutzte Alltagsbegriffe sind, weshalb sich die in der Mathematik durchweg üblichen Nominaldefinitionen (bei denen das Definiendum allererst entsteht) zunächst verbieten. Aber auch Realdefinitionen, wie sie etwa bei der Wahrscheinlichkeit hintereinander im Curriculum folgen (z.B. die klassische, die frequentistische, die bedingte, die subjektive), treffen jeweils nur eine Farbe dieses Chamäleons. Jede von ihnen ist nur ein Schritt im hermeneutischen Umkreisen dieses Begriffs und sollte im diskutierenden Unterricht auch so herausgestellt werden. Dabei können auch die

Lehrenden lernen, was bitter notwendig ist, weil die üblichen Stochastikvorlesungen dies nicht leisten (wollen) (s. Eichler 2003). Für den Zufallsbegriff wird aus Zeitgründen auf die ausgezeichnete Studie von Sill (1993) verwiesen. Die dort vorgeschlagenen terminologischen Änderungen werden allein wohl nicht reichen. Über Determiniertheit und Indeterminiertheit mit ihren vielen Aspekten muß immer wieder, den gesamten Lehrgang hindurch nachgedacht werden.

#### d) Aufstellen einer Axiomatik

Was leisten die Kolmogoroff-Axiome? Was können sie nicht leisten? Warum nicht? Was unterscheidet dieses System von anderen Axiomensystemen (etwa der Euklidischen Geometrie oder der natürlichen (reellen) Zahlen)? Gibt es zu ihm äquivalente Systeme?

Fragen dieser Art führen die Diskussionen in c) weiter und geben ihnen einen gewissen (resignativen?) Abschluß.

#### e) Mühen um schwierige Theorieteile

Hierzu drei Beispiele:

- Was unterscheidet Regression und Korrelation? Warum braucht man beide Maße? Welches ist wann erforderlich?
- In welchem Verhältnis stehen Empirisches und Schwaches Gesetz der großen Zahlen? Was an diesem ist schwach? Wie könnte man es verstärken? und
- Übliches Testen von Hypothesen nach Fisher-Neyman-Pearson versus Schätzen von Wahrscheinlichkeiten gemäß Bayes.

Dieser Schulkrieg (wo gibt es das sonst noch in der Mathematik?) scheint besonders geeignet für eine oszillierende Unterrichtsgestaltung. Nach Durchführung einiger solcher Tests denkt man über ihre Vorzüge und Grenzen nach, vertieft sich in den Bayes-Ansatz als Alternative und stellt ihn schließlich dem klassischen Testen gegenüber.

Die letzten beiden Anlässe setzen bereits erhebliches stochastisches Wissen und Können voraus und müssen daher wohl der gymnasialen Oberstufe vorbehalten bleiben. Das gilt nicht für die vorab genannten und schon gar nicht für den folgenden, dem hier besondere Bedeutung zukommt.

#### f) Klären von Paradoxien

Mit „paradox“ meinen wir bekanntlich, daß eine Aussage im Widerspruch steht zu einer anderen, die bis dato für selbstverständlich gehalten wird (s. Simpson-Paradoxon), oder daß mehrere Aussagen über dieselbe Sache, obwohl je einzeln gut begründet, einander widersprechen (s. Bertrand-Paradoxon).

Meschkowski (1965) widmet ein ganzes Kapitel der „*Bildungsfunktion der Paradoxie*“. Vor allem stellt er heraus, daß ihre Aufhebung aufklärerische Wirkung hat, indem sie kritisch werden läßt gegenüber Vorurteilen und unzulässigen Verallgemeinerungen wehrt, wie sie in der Öffentlichkeit leider üblich sind.

Nun ist die Stochastik ungewöhnlich reich an Paradoxien (s. Székely 1990, Winter 1992; für die beschreibende Statistik auch Meyer 1995 und Jahnke 1993, der die Arbeit am Simpson-Paradoxon ganz bewußt mit Allgemeinbildung in Zusammenhang bringt). Winter ist überzeugt, daß der tiefere Grund dafür in der Überbewertung des Faktischen gegenüber dem Möglichen liegt, in unserem (ja durchaus positiven) Hang, Unsicherheit auf (bereits bekannte und vielfach geübte) deterministische Weise in Sicherheit zu überführen (s. Abschnitt 1).

Als Beispiel erinnern wir uns das vorschnelle Bilden irrelevanter Verhältnisse und das Festhalten an Verhältnissen trotz hinzutretender Information. Daß von 35 in einem Raum anwesenden Personen zwei am gleichen Tag Geburtstag feiern, scheint auf Anhieb die Wahrscheinlichkeit  $35/365$  zu haben; ebenso klar scheint (selbst für manchen „Experten“), daß die Wahrscheinlichkeit, ein Auto statt der Ziege zu kriegen, auch nach Öffnen einer „Ziegentür“  $1/\text{Anzahl der verschlossenen Türen}$  bleibt, weshalb sich für den Kandidaten ein Wechsel der Tür nicht lohnt. Von daher ist übrigens auch verständlich, welchen methodischen Fortschritt es bedeutet, am Baumdiagramm nicht mit Brüchen, sondern mit natürlichen Zahlen zu arbeiten (s. Krauss 2001). Das hat auch schon Arthur Engel mit seinem Wahrscheinlichkeitsabakus (s. Engel 1975) getan, der leider kaum noch eingesetzt wird.

Zweifellos spielen aber auch ungeklärte stochastische Primärintuitionen eine blockierende Rolle.

Winter nennt in seiner Studie sechs *aufklärend wirkende Strategien*, von denen zwei als besonders ergiebig herausgehoben werden sollen, einmal die Realisierung des zugrundeliegenden Zufallsexperiments, meist durch *Simulation*, und zum anderen die *Modifikation der Situation*. Hierzu hat der Autor in seinem o.a. Forschungsprojekt recht gute Erfahrungen gewinnen können (s. Schupp 2002).

Die didaktische Literatur hat den hohen bildnerischen Wert von Paradoxien seit langem erkannt und an vielen Beispielen herausgestellt. In der unterrichtlichen Praxis bleibt es jedoch zu häufig noch bei ihrer bloßen Behandlung. Ein verwundertes Kopfschütteln der Lernenden ob der erhal-



tenen Lösung(en) genügt nicht. Staunen ist, wie wir seit Aristoteles wissen, nicht das Ende, sondern der Anfang vieler tieferreichender Bemühungen.

Noch einmal sei herausgestellt, daß der Stochastikunterricht nicht einfach nur seinen Teil am Gesamtbeitrag des Mathematikunterrichts zum Anstoß von Bildungsprozessen abliefern, sondern spezifische, kaum auswechselbare Gelegenheiten zum Nachdenken bietet, auf die eine allgemeinbildende Schule nicht verzichten kann.

## Anmerkungen

- 1 Eher noch schlimmer treibt es die von der Vereinigung der bayerischen Wirtschaft in Auftrag gegebene Studie „Bildung neu denken“. Nach ihr haben Schulen „service- und kundenorientiert“ zu sein und sollen „in allgemeiner und arbeitsorientierter Bildung unternehmerische Qualifikationen“ (z.B. „Optimismus“ und „Unabhängigkeitsstreben“) vermitteln, weshalb Kinder – natürlich nach einem „Schulleistungsscreening“(!) – mit vier Jahren einzuschulen seien.
- 2 Meerfahrt mit Don Quijote (1934)
- 3 Denkbar wäre statt „charakteristisch“ auch „leitend“ oder „zentral“.
- 4 Etwa: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis über einen bestimmten Pfad eingetreten ist, ist gleich dem Quotienten aus der Wahrscheinlichkeit für diesen Pfad und der Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Pfade, die zu diesem Ereignis führen.
- 5 Allerdings favorisiert Buth nun gerade statt der Baumdiagramme und Pfadregeln eine flächige Darstellung in Gestalt eines gemäß den Stufenwahrscheinlichkeiten zweifach aufgeteilten Quadrats. Empirische Untersuchungen (s. Vancsó 2003) bestätigen die Vorzüge dieses Wechsels in dessen nicht.
- 6 Faust, 1. Teil, Prolog im Himmel
- 7 Bruchstück einer Theorie der Bildung des Menschen (1793)
- 8 Über die Organisation der höheren wissenschaftlichen Anstalten in Berlin (1810)
- 9 Zunächst (s. Heymann 1989) hieß es stattdessen „Förderung von Phantasie und Kreativität“. Der Wegfall dieses Aspektes ist bedauerlich.
- 10 Faust, 1. Teil
- 11 „Vertiefung“ und „Besinnung“ sind Formulierungen Herders. Herder etwa spricht von „Hingabe“ und „Rücknahme“, Fröbel von „Darstellung“ und „Verinnerlichung“.
- 12 Bedeutende Förderniß durch ein einziges geistreiches Wort (1823)

## Literatur

- Aebli, H. (1980/81): *Denken. Das Ordnen des Tuns* (2 Bde.) – Stuttgart: Klett/Cotta
- Ballauff, Th. (o.J.): *Die Grundstruktur der Bildung*. Weinheim: Beltz
- Barth, F.; Haller, R. (1983): *Stochastik* (Leistungskurs) – München: Ehrenwirth
- Biehler, R. (1982): Explorative Datenanalyse: Eine Untersuchung aus der Perspektive einer deskriptiv-empirischen Wissenschaftstheorie – *IDM Materialien u. Studien* 24, Univ. Bielefeld
- Biehler, R. (2003): Simulation als systematischer Strang im Stochastikcurriculum. Henn, H.-W. (Hrsg.): *Beitr. z. Mathematikunterricht*. 2003, 109-112, Hildesheim: Franzbecker

- Biehler, R.; Kombrink, K. (1999): Mediennutzung von Schülerinnen und Schülern. *mathematik-lehren* 97, 6-11
- Bodensohn, R. (2003): Die inflationäre Anwendung des Kompetenzbegriffs fordert die bildungstheoretische Reflexion heraus. *Empirische Pädagogik* 17, 256-271
- Borovcnik, M. (1986a): Zum Teilungsproblem. *J. f. Math.-Did.* 7 (1), 45-70
- Borovcnik, M. (1986b): Zum „Zum Teilungsproblem“. *J. f. Math.-Did.* 7 (4), 311-3
- Borovcnik, M. (1989): Eine Einführung in die Explorative Datenanalyse. *Stoch. Schule* 9(3), 5-20
- Borovcnik, M. (1992): *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*. Mannheim: B.I.
- Borovcnik, M.; Engel, J.; Wickmann, D. (Hrsg.) (2001): *Anregungen zum Stochastikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker
- Buth, M. (2003): Methodische Anregungen zur Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit. *Der math u. naturwiss. Unterricht* 56(7), 391-4
- Davis, Ph.J.; Hersh, R. (1986): *Descartes' Dream – The World according to Mathematics*. New York: Harcourt Brace Jovanovich
- Diederich, J. (1980): Vom Fluch der Liebe zur Mathematik. *J. f. Math.-Did.* 1 (4), 277-297
- Eichler, A. (2003): Was ist Wahrscheinlichkeit? Individuelle Unterrichtskonzepte von Lehrerinnen und Lehrern. *MU* 49, 69-82
- Engel, A. (1975): Der Wahrscheinlichkeitsabakus. *MU* 21 (2), 70-94
- Engel, J. (1999): Von der Datenwolke zur Funktion. *mathematiklehren* 97, 60-64
- Engel, J.(Hrsg.) (2003): Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stoch. Schule* 23 (3). Und: Mitt. d. Ges. f. Didaktik d. Math. 75 (2002), 75-83
- Fischbein, E. (1975): *The intuitive Sources of probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: Reidel
- Gigerenzer, G. u.a. (1999): *Das Reich des Zufalls*. Heidelberg: Spektrum
- Haller, R. (1988): Zur Geschichte der Stochastik. *Did. d. Math.* 16 (4), 262-277
- Hentig, H.v. (1996): *Bildung*. München: Hanser
- Hentig, H.v. (2003): Die vermessene Bildung. *Neue Sammlung* 43 (2), 211-237
- Heymann, H.W. (1989): Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? *mathematiklehren* 33, 4-9
- Heymann, H.W. (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz
- Ineichen, R. (1987): Schwierigkeiten mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff – ein Blick in die Geschichte. *Zentr. für Did. d. Math.* 19(3), 103-7
- Ineichen, R. (1992): Aus der Vorgeschichte der Mathematischen Statistik. *Elemente der Mathematik* 47, 93-107

- Ineichen, R. (1995): Zur Geschichte einiger grundlegender Begriffe der Stochastik. *Did. d. Math.* 23 (1), 1-17
- Institut d. Deutschen Wirtschaft Köln (1999): *Möglichkeiten zur Förderung des Erwerbs von Schlüsselqualifikationen durch Studierende.* Ergebnisse einer Umfrage bei niedersächsischen Unternehmen. Köln
- Jahnke, Th. (1993): Das Simpsonsche Paradoxon verstehen – ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. *J. f. Math.-Did.* 14 (3/4), 221-242
- Kapadia, R.; Borovcnik, M. (1991): *Chance encounters: Probability in Education.* Dordrecht: Kluwer
- Klafki, W. (1985): *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik.* Weinheim: Beltz
- Köhler, H. (1992): *Über Relevanz und Grenzen von Mathematisierungen.* Buxheim: Polygon
- Köhler, H. (1993): Ermöglichung von Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. AK „Mathematik und Bildung“ (Hrsg.), *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht.* Buxheim: Polygon, 81-104
- Köhler, H. (1996): Zur Notwendigkeit der Distanz des Didaktikers. *J. f. Math.-Did.* 17 (1), 73-76
- Krauss, St.(2001): Wahrscheinlichkeit und Intuition–Zwei Seiten einer Medaille? Borovcnik, M. u.a.(Hrsg.): *Anregungen zum Stochastikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker, 139-146
- Kröpfl, B.; Peschek, W.; Schneider, E. (2000): Stochastik in der Schule: Globale Ideen, lokale Bedeutungen, zentrale Tätigkeiten. *math. did.* 23 (2), 25-57
- Kütting, H. (1990): Stochastik im Mathematikunterricht–Herausforderung oder Überforderung? *MU* 36 (2), 5-19
- Kütting, H. (1994): *Didaktik der Stochastik.* Mannheim: B.I.
- Lergenmüller, A.; Schmidt, G. (2000ff): *Mathematik – Neue Wege.* Hannover: Schroedel
- Meschkowski, H. (1965): *Mathematik als Bildungsgrundlage.* Braunschweig: Vieweg
- Meyer, J. (1995): Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik. *Stoch.Schule* 15(2), 27-50
- MNU (2003): Empfehlungen zum Umgang mit Bildungsstandards im Fach Mathematik. *Der math. u. naturwiss. Unterricht* 56, III-X
- Müller, G.; Steinbring, H.; Wittmann, E. (2002): *Jenseits von PISA: Bildungsreform als Unterrichtsreform.* Seelze-Velber: Kallmeyer
- Nestle, F. (2003): Wer Wie Wa bildungsstandard. de. Henn, H.-W.(Hrsg.), *Beitr. z. Mathematikunterr. 2003*, 461-464, Hildesheim: Franzbecker
- Schupp, H. (1978): Lernschwierigkeiten in einem Stochastik-Curriculum. Bauersfeld, H. u.a. (Hrsg.) *Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht*, Schriftenreihe des Inst. f. Did. d. Math.
- Schupp, H. (1983): *Curriculum Stochastik in der Hauptschule.* Paderborn: Schöningh
- Schupp, H. (Hrsg.) (1985): Galton-Brett. *mathematiklehren* 12
- Schupp, H. (1986): Zur didaktischen Analyse des Teilungsproblems. *J. f. Math.-Did.* 7(2/3), 217
- Schupp, H. (2002): *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker
- Sill, H.-D. (1993): Zum Zufallsbegriff in der mathematischen Allgemeinbildung. *Zentralblatt f. Did. d. Math.* 25 (2), 84-8
- Steinbring, H. (1980): *Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.* Bielefeld, Inst. für Did. d. Math., Materialien und Studien
- Strick, K. (2003): Leistungskurs Stochastik. Griesel, H.; Postel, H.; Suhr, F.: *Elemente der Mathematik*, Hannover: Schroedel
- Székely, G.J. (1990): *Paradoxa. Klassische und neuere Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik.* Frankfurt: Deutsch
- Trauerstein, H. (1990): Zur Simulation mit Zufallsziffern im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Stochastik Schule* 10(2), 2-30
- Vancsó, Ö. (2003): Wie verstehen Studenten die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Henn, H.-W. (Hrsg.), *Beiträge z. Mathematikunterricht 2003*, 633-636, Hildesheim, Franzbecker
- Weinert, F.E.; Helmke, A. (1995): Learning from wise mother nature or big brother instructor: The wrong choice as seen from an educational perspective. *Educ. Psychologist* 30(3), 135-142
- Winter, H. (1972): Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. *Beiträge zum Lernzielproblem.* Ratingen: Henn
- Winter, H. (1976): Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule. *Did. d. Math.* 4 (1), 22-37
- Winter, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. *J. f. Math.-Did.* 13 (1), 23-53
- Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitt. d. Ges. f. Math.* 61, 37-46
- Wirths, H. (1999): Die Geburt der Stochastik. *Stoch. Schule* 19 (3), 3-30
- Wollring, B. (1992): Ein Beispiel zur Konzeption von Simulationen bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. *Stoch. Schule* 12 (3), 2-25
- Wolpers, H.; Götz, S.(2002): Didaktik der Stochastik. Tietze, U.-P. u.a (Hrsg.): *Mathematik in der Sekundarstufe II* Bd.3. Braunschweig: Vieweg

#### **Anschrift des Verfassers**

Prof. a.D. Dr. Hans Schupp  
Fak. f. Math. u. Inf. – Universität d. Saarlandes  
Postfach 15 11 50  
D 66041 Saarbrücken  
[schupp@math.uni-sb.de](mailto:schupp@math.uni-sb.de)