

Wer tauscht – gewinnt nicht

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

Zusammenfassung: Ausgehend von Simulationen wird das „Paradoxon der zwei Umschläge“, das Löwe (2003) unter dem Titel „Wer tauscht

gewinnt“ behandelt hat, genauer analysiert. Dabei zeigt sich, dass man in keinem Fall die Gewinnerwartung durch Tauschen erhöhen kann.

1 Einleitung

Thema dieses Beitrags ist das „Paradoxon der zwei Umschläge“. Zum Verständnis des Folgenden sei das Problem noch einmal kurz skizziert (Löwe 2003, S. 21):

„Ein Gönner bietet an, Ihnen Geld zu schenken. Dabei stellt er sich so an, dass er das Geld in zwei Umschlägen deponiert, von denen bekannt ist, dass der eine doppelt so viel Geld enthält wie der andere. Wir ziehen einen von ihnen und öffnen ihn. Danach bietet uns unser Gönner an, den Umschlag gegen den anderen zu tauschen – sollen wir das tun?“

Zum Paradoxon wird dieses Problem nun durch den Umstand, dass eine scheinbar korrekte Berechnung für den Erwartungswert des Geldgeschenks einen Zuwachs von 25% gegenüber dem vorgefundenen Betrag verspricht und es daher geraten erscheinen lässt, die Umschläge zu tauschen. Hat man nämlich in dem gewählten Umschlag x Euro vorgefunden, so sind in dem anderen entweder $x/2$ oder $2x$ Euro, beides jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5. Als Erwartungswert für den eingetauschten Betrag wird hieraus

$$0,5 \cdot x/2 + 0,5 \cdot 2x = 1,25 \cdot x$$

errechnet. Wo der Fehler in dieser Herleitung liegt und wie man den durch Tauschen zu erzielenden Gewinn korrekt berechnet, zeigen wir in Abschnitt 3.2.

2 Voraussetzungen

Für eine saubere Analyse der unterschiedlichen Varianten, in denen uns das Problem schon bei Löwe begegnet, sind folgende Voraussetzungen von Bedeutung: (1) Man sollte jeweils deutlich unterscheiden zwischen der Sichtweise des Gönners und der des Beschenkten. (2) Der Beschenkte hat keine Information, die ihm eine Strategie liefert, sich für oder gegen Tauschen zu entscheiden (wie es bei Löwe 2003, S. 22f mehrfach anklingt).

Wir erläutern die unterschiedlichen stochastischen Situationen, in denen sich Gönner und Beschenkte befinden an Hand von Baumdiagrammen:

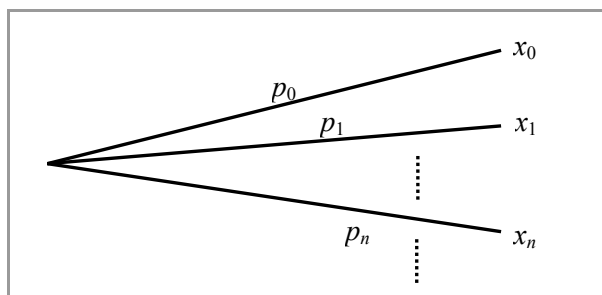


Abb. 1: Situation des Gönners

Für den Gönner ist der kleinere Betrag (den er in Umschlag A legt) eine Zufallsvariable X , die wir als diskret annehmen (Abbildung 1). Ihre Wertemenge muss nicht endlich sein. Wenn der Betrag x_i durch ein geeignetes Zufallsexperiment bestimmt ist, wird dieser Betrag in Umschlag A und der doppelte $2 \cdot x_i$ in Umschlag B gelegt.

Man kann nun die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(2X)$ für die Beträge in den Umschlägen berechnen und daraus (wenn $E(X)$ nicht unendlich ist) den Verlust, den der Gönner im Mittel erleidet.

Diese Werte sind aber für den Beschenkten völlig uninteressant, denn aus seiner Sicht stellt sich die Situation wie in Abbildung 2 dar:

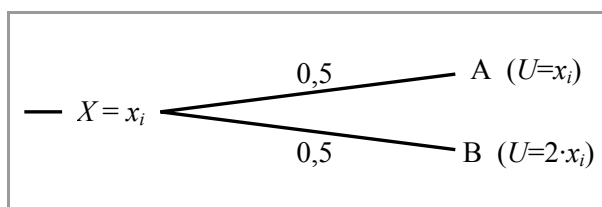


Abb. 2: Situation des Beschenkten (Stufe 1)

Er kennt die Höhe des Betrags x_i nicht, wohl aber die im Umschlag vorgefundene Summe. Sie ist für ihn die relevante Zufallsvariable, die wir U nennen wollen. Da die Umschläge nicht unterscheidbar sind, ist die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von A und B gleich, also jeweils 0,5.

Der Erwartungswert für den im ausgewählten Umschlag gefundenen Betrag hängt von dem zuvor zufällig oder willkürlich bestimmten Wert x_i der Zufallsvariablen X ab. Wir schreiben ihn daher als bedingten Erwartungswert und erhalten anhand von Abbildung 2:

$$E(U|X=x_i) = 0,5 \cdot x_i + 0,5 \cdot 2x_i = 1,5 \cdot x_i.$$

Nachdem er sich für einen der beiden Umschläge entschieden hat, steht der Beschenkte vor der Frage „Tauschen oder nicht?“. Bei der Untersuchung dieser Frage folgen wir der Dichotomie Löwes und unterscheiden die Fälle „ $E(X)$ endlich“ (Abschnitt 3) und „ $E(X)$ nicht endlich“ (Abschnitt 4).

3 Der Fall „ $E(X)$ endlich“

3.1 Eine Simulation

Bevor wir eine theoretisch begründete Antwort auf die Frage „Tauschen oder nicht?“ geben, wollen wir uns zunächst anhand von Simulationen einen Eindruck verschaffen, wie sich Tauschen auf den durchschnittlichen Gewinn auswirkt.

Wir wählen als Beispiel 1 den auch von Löwe behandelten Fall mit zwei möglichen Beträgen, die in Umschlag A kommen können, nämlich $x_0 = 50$ € und $x_1 = 100$ €. Die Wahrscheinlichkeiten seien für beide Beträge gleich, also $p_0 = p_1 = 0,5$.

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse von 100 Versuchen:

| x_i (in €) | gewählt | | Durchschnittlicher Gewinn (in €) | |
|-----------------|---------|----|----------------------------------|-----|
| | A | B | | |
| 50 | 24 | 30 | ohne Tauschen | 107 |
| 100 | 27 | 19 | mit Tauschen | 112 |

Tab. 1: Ergebnisse von 100 Simulationen

Zwar steigt der durchschnittliche Gewinn durch das Tauschen hier, aber bei weitem nicht um die nach der Rechnung in der Einleitung erwarteten 25%.

U besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| | | | |
|------------|------|------|------|
| u (in €) | 50 | 100 | 200 |
| $P(U = u)$ | 0,25 | 0,50 | 0,25 |

Tab. 2: Wahrscheinlichkeitsverteilung von U

Hieraus ergibt sich in diesem Beispiel für den im Umschlag gefundenen Betrag der Erwartungswert

$$E(U) = 50 \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,50 + 200 \cdot 0,25 = 112,5$$

(bei dem aus der Sicht des Gönners argumentiert wird, also kein bedingter Erwartungswert vorliegt).

In unserer Serie von 100 Simulationen lagen die Mittelwerte (107 ohne und 112 mit Tauschen) um 0,5 bzw. 5,5 unterhalb von $E(U)$. Um auch die Abweichung vom Erwartungswert beurteilen zu können, berechnen wir noch die Varianz:

$$\begin{aligned} V(U) &= E(U^2) - [E(U)]^2 \\ &= 15625 - 112,5^2 = 2968,5. \end{aligned}$$

Als Standardabweichung für ein einzelnes Spiel erhält man daraus $\sigma_U = \sqrt{2968,5} \approx 54,49$, und für 100 Versuche erhält man $\bar{\sigma} = \sigma_U / \sqrt{100} \approx 5,45$. Weitere Serien mit jeweils 100 Versuchen zeigen ähnliche Ergebnisse wie die aus Tabelle 1:

| | Durchschnittlicher Gewinn | | | | | |
|---------|---------------------------|-------|-------|-----|-------|-----|
| ohne T. | 121,5 | 112,5 | 113 | 120 | 107,5 | 115 |
| mit T. | 105 | 111 | 119,5 | 111 | 116 | 110 |

Tab. 3: Ergebnisse 6 weiterer Simulationsserien

Nur in 2 von den 6 Serien ist Tauschen im Mittel günstiger gewesen als bei der anfänglichen Wahl des Umschlags zu bleiben. In keiner der Serien weicht der durchschnittliche Gewinn um mehr als $2\bar{\sigma} \approx 10,9$ vom Erwartungswert 112,5 ab.

Die Simulationsergebnisse machen das Paradoxon noch einmal deutlich: Die mit der „Theorie“ aus Abschnitt 1 versprochene 25-prozentige Steigerung des Gewinns ist mit den empirischen Daten nicht in Einklang zu bringen.

3.2 Erklärung des Paradoxons

Bei der Analyse des Gedankengangs in Abschnitt 1, der 25% mehr Gewinn für den Fall des Tauschens verspricht, fällt folgender Widerspruch auf: Für den Betrag im nicht gewählten Umschlag treten die Terme $x/2$ und $2x$ auf; diese unterscheiden sich um den Faktor 4, während sie sich doch tatsächlich auf Grund der Versuchsbedingungen lediglich um den Faktor 2 unterscheiden dürften.

Diese Beobachtung führt uns nun zur Lösung des Paradoxons. Wir erläutern sie an Abbildung 3, in der das Baumdiagramm aus Abbildung 2 um eine neue Stufe für den Tauschvorgang ergänzt wurde.

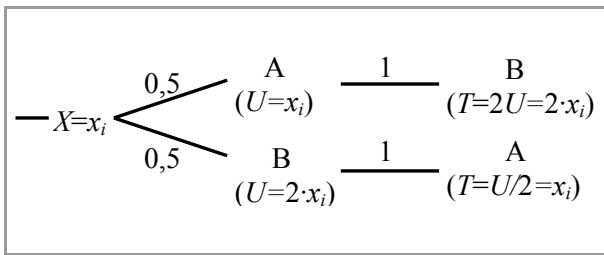


Abb. 3: Situation des Beschenkten (Stufe 2)

Hier wird der Denkfehler in der Argumentation von Abschnitt 1 erkennbar: Der dort mit x bezeichnete Inhalt des gewählten Umschlags wird wie eine Konstante behandelt, obwohl es sich doch um eine (von uns oben mit U bezeichnete) Zufallsvariable handelt, die die Werte x_i oder $2x_i$ annehmen kann. Es sei T die Zufallsvariable, die den Betrag im anderen Umschlag angibt, den man durch Tausch gewinnt. Bei der Berechnung von T längs der beiden Pfade in Abbildung 3 unterscheiden sich zwar die *Koeffizienten* von U um den Faktor 4, die *Werte*, welche $2 \cdot U$ bzw. $0,5 \cdot U$ annehmen können, sind aber natürlich auch hier $2x_i$ oder x_i . Diese unterscheiden sich um den Faktor 2 und nicht um 4, wie es durch die Behandlung der Variablen x als Konstante in der Rechnung der Einleitung vorgetäuscht wurde.

Aus Abbildung 3 ergibt sich für das Geschenk, falls man tauscht, als bedingter Erwartungswert derselbe Wert wie für U im Fall ohne Tauschen, nämlich

$$E(T|X=x_i) = (0,5 \cdot 1) \cdot 2x_i + (0,5 \cdot 1) \cdot x_i = 1,5 \cdot x_i,$$

was nun auch gut zu den Simulationsergebnissen passt.

4 Der Fall „E(X) nicht endlich“

Mit unseren bisherigen Betrachtungen sollte das Problem eigentlich gelöst sein, auch für den Fall, dass die Wertemenge und der Erwartungswert von X nicht endlich sind, denn wir haben in Abschnitt 3.2 an keiner Stelle Voraussetzungen über die möglichen Werte für X gemacht.

Es entsteht die Frage, ob dann folgende Aussage richtig sein kann: „... selbst der kleinere der beiden Beträge [gemeint sind $E(X)$ und $E(2X)$] besitzt einen unendlichen Erwartungswert. Dann kann es in der Tat sein, dass es stets günstiger ist, den erhaltenen Umschlag wieder einzutauschen.“ (Löwe 2003, S. 23)

Löwe widerspricht hiermit ausdrücklich von Savant (1992), zu deren Standpunkt „während auf den ersten Blick Tauschen günstiger scheint, macht es

faktisch keinen Unterschied“ er bemerkt: „Wie wir sehen werden, ist auch dies nicht vollständig wahr.“ Um seine Aussage zu belegen, untersucht er das folgende Beispiel 2:

$$x_i = 2^i \text{ und } p_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

(Bezeichnungen wie in Abbildung 1, $i \in \mathbb{N}$).

Für diese Konstellation behauptet Löwe, „dass Tauschen in jedem Fall die bessere Strategie ist“ und errechnet für T einen um 10% höheren Erwartungswert als für U , falls $i \in \mathbb{N}^*$ ist, bzw. eine Steigerung der Gewinnerwartung auf das Doppelte für $i = 0$. Der versprochene Gewinnzuwachs von 10% ist für dieses Beispiel kleiner als 25%, weil die p_i anders als in Beispiel 1 wegen der unendlichen Wertemenge W_X nicht alle gleich sein können, sondern hier eine geometrische Folge bilden.

4.1 Simulation zu Beispiel 2

Wie im Abschnitt 3.1 verschaffen wir uns auch hier zunächst durch Simulationen einen Eindruck von der Auswirkung des Tauschens. Tabelle 4 zeigt den Vergleich der Mittelwerte \bar{u} und \bar{t} für den Gewinn bei Ziehung ohne bzw. mit Tauschen aus zwölf Serien mit jeweils 100 Versuchen:

| Serie | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------|----|----|------|----|----|----|
| \bar{u} | 34 | 44 | 2688 | 36 | 56 | 47 |
| \bar{t} | 37 | 31 | 1365 | 38 | 79 | 33 |

| Serie | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------|----|-----|----|-----|----|-----|
| \bar{u} | 53 | 344 | 29 | 60 | 32 | 101 |
| \bar{t} | 63 | 175 | 32 | 164 | 40 | 58 |

Tab. 4: Gerundete Ergebnisse von 12 Serien mit je 100 Simulationen zu Beispiel 2

Zunächst fällt auf, dass im Gegensatz zu Tabelle 3 trotz des gleichen Stichprobenumfangs von jeweils 100 Versuchen die Mittelwerte sehr stark streuen. Dies lässt sich erklären als Folge des unendlich großen Erwartungswerts von X . Wir betrachten dazu die beiden Serien mit dem größten bzw. kleinsten Mittelwert \bar{u} :

In der dritten Serie wurde in einem der Versuche $i = 17$ ausgelost (d.h. $x_{17} = 131\,072$ € in Umschlag A und $262\,144$ € in B gelegt) und dann Umschlag B gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für diese oder noch höhere Beträge in den beiden Umschlägen ist

$$P(i \geq 17) = \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \approx 0,0010.$$

In den insgesamt 1200 Versuchen kann man also mit diesem Ereignis etwa einmal rechnen. In den übrigen 99 Versuchen der dritten Serie betrug die Summe der x_i rund 6700 € gezogen, so dass sich als Mittelwert 2688 € ergibt. Da x_{17} der bei weitem höchste Einzelbetrag ist und hier Umschlag B gezogen wurde, sinkt der Mittelwert durch Tauschen etwa auf die Hälfte ab.

Die kleinsten Mittelwerte finden sich in der neunten Serie; hier kann in keinem der 100 Versuche $i \geq 11$ gewesen sein, da sonst in Umschlag B mindestens 4096 € gewesen und somit mindestens einer der Mittelwerte \bar{u} und \bar{t} größer als 40 geworden wäre. Die Wahrscheinlichkeit für 100 Versuche ohne $i \geq 11$ hat dann wegen

$$P(i \geq 11) = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \approx 0,0116$$

den Wert $[1 - P(i \geq 11)]^{100} \approx 0,313$, der gut zu den Simulationsergebnissen in Tabelle 4 passt, denn die obigen Überlegungen gelten ebenso für die 1., 4. und 11. Serie, also insgesamt bei einem Drittel der Serien (möglicherweise sind auch bei der 2. und 6. Serie alle $i < 11$).

Wie schon Löwe bemerkt, ist es natürlich bei unserem Spiel in praxi nicht realisierbar, mit einem unendlichen Erwartungswert zu arbeiten. Aber es ist theoretisch möglich, und kann, wie uns die Ergebnisse der Simulationen zeigen, neuartige und überraschende Ergebnisse bringen, deren Analyse einen Beitrag zum Verständnis des schwierigen Phänomens „unendlicher Erwartungswert“ leisten kann.

Im Hinblick auf die Frage, wie sich das Tauschen auf die Gewinnerwartung auswirkt, lassen die Daten der Tabelle 4 Zweifel an Löwes Versprechen aufkommen, die Strategie des „Tauschens auf jeden Fall“ bringe auf Dauer einen mindestens 10% höheren Gewinn als wenn man bei dem zuerst gewählten Umschlag bleibt.

Grundlage für die Hoffnung auf eine Steigerung der Gewinnerwartung durch Tauschen war folgende richtige Feststellung: Wenn man im gezogenen Umschlag 2^i € vorfindet (mit $U = 2^i > 1$), dann ist die dadurch *bedingte* Wahrscheinlichkeit, dass man Umschlag A gewählt hat, $P(A|U > 1) = 0,4$ und für den anderen Umschlag $P(B|U > 1) = 0,6$. Die *totale* Wahrscheinlichkeit ist natürlich jeweils 0,5:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(U = 1) \cdot P(A|U = 1) + P(U > 1) \cdot P(A|U > 1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und analog für P(B).

Korrekt in der Argumentation ist auch der Schluss, dass man den im gezogenen Umschlag gefundenen Betrag – für sich betrachtet – durch Tauschen im Mittel tatsächlich um 10% vergrößern kann.

Diese Aussage gilt übrigens – mit einer kleinen, aber entscheidenden Einschränkung – auch für den Fall eines endlichen Erwartungswertes $E(X)$, wie er unter der realistischeren Annahme vorliegt, dass der Gönner den Betrag x_i nach oben begrenzt. Es soll nun vorübergehend $i \leq n$ und $x_i \leq x_n = 2^n$ bleiben, wobei der Gönner n beliebig groß wählen kann.

Die aus der Analyse eines solchen Beispiels im folgenden Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse werden wir dann auf den Fall eines unbegrenzten Einsatzes übertragen.

4.2 Ein Beispiel für begrenzten Einsatz

Wir betrachten als Beispiel 3 den Fall $n = 4$, der in Abbildung 4 veranschaulicht ist. In Umschlag A liegen höchstens 2^4 €, in B höchstens 2^5 €. Wie in Beispiel 2 sollen die (hier mit p_i^* bezeichneten) Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten $\frac{2}{3}$ bilden. Wegen $i \leq 4$ ist diese Folge endlich, die p_i^* sind daher um den Faktor $\frac{1}{s_4}$

$$\left(\text{mit } s_4 = \sum_{i=0}^4 p_i \approx 0,868\right)$$

größer als die p_i in Beispiel 2; es gilt also

$$p_i^* \approx 1,15 \cdot p_i.$$

Damit erhält man folgende Wahrscheinlichkeiten:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| p_i | 0,3333 | 0,2222 | 0,1481 | 0,0988 | 0,0658 |
| p_i^* | 0,3839 | 0,2559 | 0,1706 | 0,1137 | 0,0758 |

Tab. 5: Vergleich von p_i und p_i^* (Beispiel 2 und 3)

Aus Abbildung 4 lässt sich leicht die Verteilung von U gewinnen: Zu den Ereignissen $U = 1$ und $U = 2^5$ führt jeweils nur ein Pfad mit der Wahrscheinlichkeit $0,5 \cdot p_0^*$ bzw. $0,5 \cdot p_4^*$. Für $0 < i < 5$ gehören dagegen zu $U = 2^i$ je zwei Pfade, so dass

$$\begin{aligned} P(U = 2^i) &= 0,5 p_{i-1}^* + 0,5 p_i^* \\ &= 1,25 p_i^* \end{aligned}$$

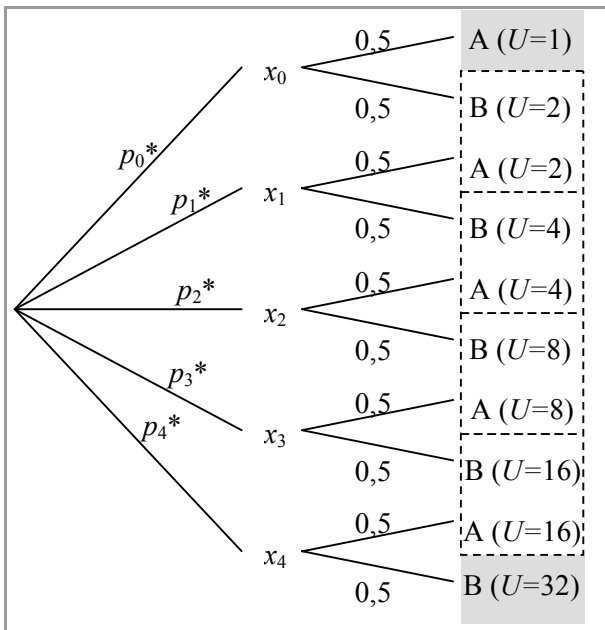


Abb. 4: Baumdiagramm zu Beispiel 3

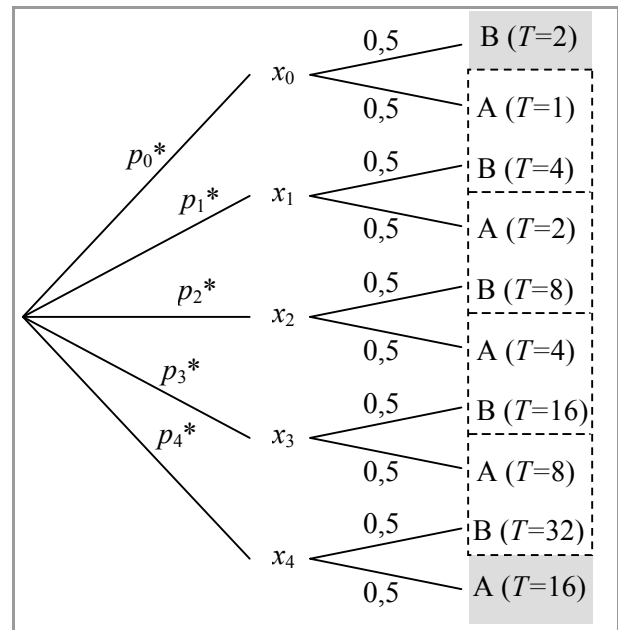


Abb. 5: Baumdiagramm (Beispiel 3) nach Tauschen

gilt (wegen $p_{i-1}^* = 1,5 \cdot p_i^*$). Hieraus ergibt sich für U folgende Verteilung:

| u | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(U=u)$ | 0,192 | 0,320 | 0,213 | 0,142 | 0,095 | 0,038 |

Tab. 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung von U

In den Fällen $2 \leq u \leq 16$ (weiße Tabellenfelder) ergibt sich als Summand für den Erwartungswert $E(U)$ jeweils

$$1,25 p_i^* \cdot 2^i.$$

Tauscht man nun, so ergibt sich die in Abbildung 5 wiedergegebene Situation. Aus ihr entnimmt man: Die Pfade der Abbildung 4, die auf die Werte $2 \leq u \leq 16$ führten, liefern zu $E(T)$ jeweils einen Summanden der Form

$$\begin{aligned} & 0,5 \cdot 1,5 p_i^* \cdot 2^{i-1} + 0,5 p_i^* \cdot 2^{i+1} \\ & = 1,375 p_i^* \cdot 2^i \end{aligned}$$

also 10% mehr als vor dem Tausch. Auch für den jeweils obersten Pfad in Abbildung 4 und 5 wächst der Beitrag zum Erwartungswert, und zwar

$$\text{von } 0,5 p_0^* \cdot 2^0 \text{ auf } 0,5 p_0^* \cdot 2^1,$$

also sogar um 100%.

Diese Ergebnisse bestätigen zwar die allgemeinen Aussagen am Ende von Abschnitt 4.1, Abbildung 4 und 5 zeigen jedoch, dass hier ein Pfad außer Acht bleibt. Wie man für Beispiel 3 und auch allgemein leicht nachrechnet, geht bei begrenztem Einsatz der beim Tauschen bis dahin erzielte Gewinn durch den Verlust von $0,5 p_n^* \cdot 2^n$ wieder verloren. Dagegen gibt es bei unbegrenztem Einsatz keinen derartigen Pfad; hier liegt der oben erwähnte Unterschied zum Fall einer unendlichen Wertemenge W_X .

Auch ohne Rechnung ist klar, dass Tauschen im Falle begrenzter Einsätze auf lange Sicht keinen Gewinn bringt, denn aus Abbildung 5 liest man für T dieselbe Verteilung ab, die wir oben schon für U gefunden hatten (Tabelle 6). Damit besitzen U und T natürlich auch denselben Erwartungswert, und für die hier interessierende Zufallsvariable $D := T - U$, also die Differenz, welche den Zugewinn beim Tauschen angibt, gilt

$$E(D) = E(T) - E(U) = 0$$

(sofern die letzteren Erwartungswerte existieren, was jedoch immer der Fall ist, wenn die Beträge x_i begrenzt sind).

Im Hinblick auf den Übergang zum Fall nicht begrenzter Einsätze im folgenden Abschnitt soll die Zufallsvariable D anhand von Beispiel 3 noch etwas genauer betrachtet werden. Wie Abbildung 4 und 5 zeigen, gehört im Baumdiagramm zu jedem Pfad ein anderer Wert von D . Man entnimmt aus

den Baumdiagrammen die Werte der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung, die wir f nennen:

| | | | | | |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| d | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| $f(d)$ | $0,5p_0^*$ | $0,5p_1^*$ | $0,5p_2^*$ | $0,5p_3^*$ | $0,5p_4^*$ |

| | | | | | |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| d | -1 | -2 | -4 | -8 | -16 |
| $f(d)$ | $0,5p_0^*$ | $0,5p_1^*$ | $0,5p_2^*$ | $0,5p_3^*$ | $0,5p_4^*$ |

Tab. 7: Wahrscheinlichkeitsverteilung von D

Bei einer endlichen Verteilung wie dieser spielt es natürlich keine Rolle, wie man bei der Berechnung von $E(D) = \sum d \cdot f(d)$ die Summanden klammert und in welcher Reihenfolge man sie addiert (fasst man jeweils die Produkte $d \cdot f(d)$ mit betragsgleichen d zusammen, so wird das oben auf andere Art gewonnene Ergebnis $E(D) = 0$ sofort erkennbar). Ist die Wertemenge von D allerdings unendlich, dann muss man sich vor einem unbedachten Gebrauch von Kommutativ- und Assoziativgesetz hüten.

4.3 Der Fall unbegrenzter Einsätze

Wir kehren zurück zu Beispiel 2. In diesem Fall hat D die Wertemenge $W_D = \{d \in \mathbb{Z} : |d| = 2^i \text{ mit } i \in \mathbb{N}\}$, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung f von D ist gegeben durch

$$f(-2^i) = f(2^i) = 0,5p_i.$$

Will man den Term für den Erwartungswert von D aufschreiben, kommt man in Schwierigkeiten, denn in der unendlichen Summe

$$E(D) = \sum_{d \in W_D} d \cdot f(d)$$

ist die Reihenfolge der Summanden in keiner Weise festgelegt. Ziemlich unpräzise kann man schreiben:

$$\dots + (-4) \frac{p_2}{2} + (-2) \frac{p_1}{2} + (-1) \frac{p_0}{2} + \frac{1p_0}{2} + \frac{2p_1}{2} + \dots,$$

wobei die Summanden nach der Größe von $d \in W_D$ angeordnet wären. Da in dieser Schreibweise aber kein Anfangsglied der Summe existiert, kann man hier auch keine Partialsummen bilden, deren Grenzwert man dann als den Wert der unendlichen Reihe ansehen könnte – falls er überhaupt existiert.

Das Problem des Anfangsgliedes der Reihe tritt bei Löwe nicht auf. Er beginnt mit $1 \cdot 0,5p_0$ (was den obersten Pfaden in Abbildung 4 und 5 entspricht) und fasst dann immer zwei Pfade mit demselben Wert der Zufallsvariablen U zusammen, wie es in den Baumdiagrammen und in der Anordnung der

Felder in Tabelle 7 gekennzeichnet, in Beispiel 2 nun aber natürlich auch für $n > 4$ fortzusetzen ist.

Wir haben oben gezeigt:

$$E(D|U=2^i) \text{ ist } 1 \text{ für } i = 0 \text{ und } 0,1 \cdot 2^i \text{ für } i \geq 1.$$

Wegen $P(U=1) = 0,5 \cdot p_0$ und

$$P(U = 2^i) = \frac{p_{i-1}}{2} + \frac{p_i}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p_i}{2} + \frac{p_i}{2} = \frac{5}{4} p_i \text{ für } i \geq 1$$

müsste man $E(D)$ auf diesem Weg berechnen als

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} P(U=2^i) \cdot E(D|U=2^i) &= \frac{p_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{4} p_i \cdot \frac{2^i}{10} \\ &= \frac{p_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot 2^i \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i. \end{aligned}$$

Die Summanden bilden ab $i = 1$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten $\frac{4}{3}$. Die unendliche Reihe divergiert folglich gegen $+\infty$.

Zu einem anderen Ergebnis führt unser Vorgehen in Abschnitt 3.2, wo wir je zwei Pfade mit demselben Wert der Zufallsvariablen X betrachtet haben.

Hier ist $E(D|X=x_i) = 0$ (vgl. 3.2) und damit müsste

$$E(D) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=x_i) \cdot E(D|X=x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot 0 = 0$$

sein.

Die widersprüchlichen Ergebnisse sind dadurch zu erklären, dass die vorliegende Reihe nicht absolut konvergiert; sie kann daher bei unterschiedlicher Anordnung bzw. Zusammenfassung ihrer Glieder ganz unterschiedliches Konvergenzverhalten zeigen.

Nummerieren wir die Elemente von W_D nach der Abfolge der Pfade in den Baumdiagrammen, also

$$d_k = \begin{cases} 2^i & \text{für } k = 2i \\ -2^i & \text{für } k = 2i + 1 \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

dann entsprechen den beiden Wegen folgende, für unser Beispiel unzulässige Berechnungen der Reihe für $E(D)$:

$$f(d_0) \cdot d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [f(d_{2i-1}) \cdot d_{2i-1} + f(d_{2i}) \cdot d_{2i}]$$

bzw.

$$\sum_{i=0}^{\infty} [f(d_{2i}) \cdot d_{2i} + f(d_{2i+1}) \cdot d_{2i+1}].$$

Es ist auch möglich, die Summe so umzuordnen, dass diese gegen $-\infty$ divergiert:

$$f(d_1) \cdot d_1 + \sum_{i=0}^{\infty} [f(d_{2i}) \cdot d_{2i} + f(d_{2i+3}) \cdot d_{2i+3}].$$

Als Konsequenz aus dieser Erkenntnis muss man feststellen, dass der Wert von $\sum d \cdot f(d)$ undefiniert ist und sich daher ein Erwartungswert für D nicht angeben lässt. Dies ist auch der tiefere Grund für die starken Schwankungen in Tabelle 4, wo \bar{d} in den 12 Serien die Werte +3, -13, -1323, +2, +23, -14, +10, -169, +3, +104, +8 und -43 annimmt.

5 Schlussbemerkungen

Die Schlussfolgerungen am Ende von Abschnitt 4 könnten den Anschein erwecken, dass auf die Frage „Tauschen oder nicht?“ keine mit mathematischen Argumenten begründete Antwort möglich ist. Um zu verstehen, dass es in der Tat eine sehr einfache Antwort gibt, nämlich „Es macht faktisch keinen Unterschied“ (vos Savant 1992), muss man sich an die eingangs betonte Bedeutung der Sichtweisen von Gönner und Beschenktem erinnern.

Die im vorigen Abschnitt behandelten Probleme sind für den Besenkten irrelevant, sie stellen sich nur dem Gönner, für den der Gesamtprozess ein dreistufiges Zufallsexperiment darstellt (zuerst die Festlegung des Wertes x_i der Zufallsvariablen X , danach die Wahl eines der beiden Umschläge durch den Besenkten und endlich dessen Entscheidung für oder gegen Tauschen).

Die oben betrachtete Zufallsvariable D ist für den Gönner die Zunahme seines Verlustes, falls der andere tauscht. Wie oben gezeigt wurde (und wie auch durch die Ergebnisse der Simulationen bestätigt wird), kann man im Fall von Beispiel 2 über den zu erwartenden Verlust des Gönners keine Aussage machen, während für Beispiel 3 und allgemein bei begrenztem Einsatz $E(D) = 0$ ist.

Ganz anders ist die Situation für den Besenkten. Für ihn liegt ein nur zweistufiges Experiment vor, wie es Abbildung 6 zeigt, da x_i bereits feststeht, wenn er in das Geschehen eingreift.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit t er tauscht, kann er durch ein Zufallsexperiment entscheiden oder aber sich auf $t = 0$ bzw. $t = 1$ festlegen, was dann den Strategien „nie tauschen“ bzw. „unbedingt tauschen“ entspricht. Wie in Abschnitt 3.2 gezeigt kann man sich mit keiner der beiden Strategien einen Vorteil verschaffen.

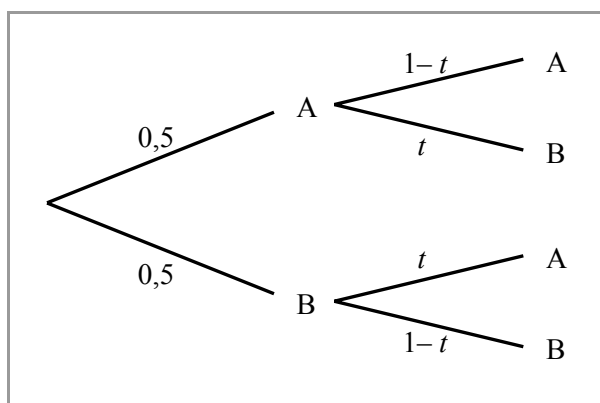


Abb. 6: Situation des Besenkten

Diesen Standpunkt vertreten in ihrer Arbeit über unser Paradoxon auch Clark und Shackel (2000), die mit bedingten Erwartungswerten arbeiten und dabei feststellen, dass (mit unseren Bezeichnungen) $E(E(D|X))$ „der einzig korrekte Weg ist, um den Erwartungswert des erwarteten Gewinns [»the expected expected-gain«] zu berechnen“ (S. 427).

Die einzige Strategie, die in Beispiel 3 Erfolg verspricht, besteht darin, nur im Falle $U = 1$ zu tauschen. Sie setzt voraus, dass der Besenkte, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung (2), den Wert von x_0 kennt. Durch Wahl von $x_0 > 1$ und $x_i = 2^i \cdot x_0$ kann man jedoch diese Möglichkeit einer Gewinnstrategie ausschalten.

Literatur

- Clark, M. und N. Shackel (2000): The two-envelope paradox. *Mind*, Volume 109, Issue 435, S. 415-442
- Löwe, M. (2003): Wer tauscht gewinnt - das Paradoxon der zwei Umschläge. *Stochastik in der Schule* 23(2), S. 21-24
- vos Savant, M. (1992): Ask Marilyn. *Parade* 20. 9., S. 20

Anschrift des Verfassers

Gerd Riehl
 Obere Mark 6
 30890 Barsinghausen
 Elfriede.Riehl@t-online.de