Eine stochastische Annäherung an die Goldbachsche Vermutung[1]

NEIL SHELDON, MANCHESTER, ENGLAND
ÜBERSETZUNG: JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

Zusammenfassung: *Die Goldbachsche Vermutung wird mit Methoden der Stochastik untersucht.*

1 Einleitung

Christian Goldbach stellte 1742 die Vermutung auf, dass jede gerade Zahl größer als 2 als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden kann. Obwohl die Goldbachsche Vermutung für Zahlen bis zu $4 \cdot 10^{14}$ verifiziert werden konnte, wurde sie bisher noch nicht bewiesen. Dieser Aufsatz untersucht diese Vermutung mit stochastischen Methoden.

Wir definieren eine Funktion G als die Anzahl der Möglichkeiten, eine Zahl als Summe zweier Primzahlen darzustellen. Dann ist beispielsweise $G(4) = 1$, weil $4 = 2+2$ und es keine weiteren Möglichkeiten gibt, 4 als Summe zweier Primzahlen zu schreiben. Hingegen ist $G(10) = 2$, weil es zwei Möglichkeiten der Zerlegung von 10 gibt: nämlich $10 = 3+7$ und $10 = 5+5$ (1 ist natürlich keine Primzahl!).

Die Goldbachsche Vermutung kann jetzt wie folgt ausgedrückt werden:

$$G(n) > 0 \text{ für alle } n \text{ in } \{4,6,8,\ldots\}.$$

Es ist interessant zu beobachten, wie schnell G wächst, wenn n zunimmt:

n	100	1000	10 000
$G(n)$	6	28	127

Tatsächlich scheint $G(n)$ außer bei kleinem n angenehm groß zu sein. Es hat daher den Anschein, dass $G(n)$ keine Chance hat, jemals null zu werden - d.h. es besteht kaum eine Chance, dass die Goldbachsche Vermutung jemals falsch ist.

Um diese Idee zu präzisieren, benötigen wir das Gaußsche Gesetz über die Verteilung der Primzahlen. In 1793 gab Gauß folgende Annäherungsformel für die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich n sind

$$\pi(n) = \frac{n}{\log(n)}.$$

Die Formel von Gauß kann verwendet werden, um so etwas herzuleiten, wie die "Wahrscheinlichkeit", dass eine zufällig gezogene ungerade Zahl prim ist. Es besteht kein Bedarf, gerade Zahlen zu untersuchen, da 2 die einzige gerade Primzahl ist. Die unnormale Existenz einer einzigen geraden Primzahl wird im Folgenden ignoriert werden.

Die Zahl $\pi(2n+1) - \pi(2n-1)$, die für große n fast exakt $\frac{2}{\log(2n)}$ beträgt, lässt sich als die erwartete Anzahl von Primzahlen in der Menge $\{2n, 2n+1\}$ interpretieren. Da es in dieser Menge aber nur einen einzigen Kandidaten für eine Primzahl gibt, nämlich $2n+1$, ist dies äquivalent zu der Behauptung, dass $\frac{2}{\log(2n)}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zahl $2n+1$ prim ist (An dieser Stelle werden einige Leser entsetzt sein bei dem Versuch, Aussagen der reinen Mathematik Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. Solchen empfindsamen Seelen sei angeraten, nicht mehr weiter zu lesen).

Haben wir einmal eine Formel für die Anzahl der Primzahlen und eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl prim ist, hergeleitet, so führt ein ziemlich direkter Weg zu Goldbachs Vermutung.

Betrachten wir zunächst eine feste Zahl, sagen wir $n = 2\,000\,000$. Jede Goldbachsche Zerlegung dieser Zahl besteht aus einem Paar P und Q, so dass $P+Q = 2\,000\,000$, wobei beide Zahlen P und Q prim sind. Nehmen wir $P \leq Q$, dann ist $P \leq 1\,000\,000$ und $1\,000\,000 \leq Q \leq 2\,000\,000$.

Um $G(2\,000\,000)$ auszuwerten, müssen wir jede Primzahl P finden und herausfinden, ob die korrespondierende Zahl Q auch prim ist. Die Formel von Gauß liefert uns einen Schätzwert für die Anzahl der Primzahlen P

$$\pi(1000000) \approx 72382.$$

Zu jeder der 72 382 Werte für P gibt es ein Q, das entweder prim oder nicht-prim ist. Wenn nun Q eine ungerade Zahl nahe 1 000 000 ist, dann ist mittels der Formel $\frac{2}{\log(2n)}$ die Wahrscheinlichkeit von

[1] Übersetzung aus *Teaching Statistics*, 2003 (1), 12-13

Q prim 0,1448. Für einen Wert von Q nahe 2000000 beträgt diese Wahrscheinlichkeit 0,1378. Klar, die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht viel in diesem Bereich. Wir können daher sagen, dass die erwartete Anzahl von Primzahlen Q mindestens

$$72382 \cdot 0,1378 \approx 9978$$

beträgt. Unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit können wir auch sagen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Zahlen Q eine Primzahl ist, mindestens

$$(1-0,1378)^{72382} \approx 10^{-4663}$$

beträgt. Somit ist eine konservative Schätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass die Goldbachsche Vermutung für die Zahl $n = 2\,000\,000$ scheitert, erstaunlich klein: weniger als 1 zu 10^{4663}.

Es ist nun einfach, das vorgetragene Argument von einer einzigen Zahl zu einem Zahlenblock zu erweitern. Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Goldbachsche Vermutung für eine Zahl zwischen 2 000 000 und 20 000 000 scheitert.

Wir sind wiederum konservativ, wenn wir feststellen, dass diese Wahrscheinlichkeit nicht größer ist als

$$\begin{aligned} 1-(1-10^{-4663})^{(10000000-1000000)} & \\ \approx \quad & (10000000-1000000)\cdot 10^{-4663} \\ approx \quad & 10^{-4656}, \end{aligned}$$

weil es (10 000 000 - 1 000 000) gerade Zahlen zu testen gibt, und jede hat eine Wahrscheinlichkeit von 10^{-4663}, die Goldbachsche Vermutung zu widerlegen. Dies wiederum ist eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit.

Eine kompliziertere Analyse würde die Tatsache berücksichtigen, dass wenn n ein Vielfaches von 6 ist, $G(n)$ im Durchschnitt doppelt so groß ist, wie wenn n kein Vielfaches von 6 ist. Dieses bemerkenswerte Resultat - das leicht zu beweisen ist - hat nur eine geringe Auswirkung auf die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten.

Betrachten wir schließlich eine Folge von Zahlenblocks

$$\begin{aligned} 2\cdot 10^6 \text{ bis } 2\cdot 10^7, 2\cdot 10^7 \text{ bis } 2\cdot 10^8, \\ 2\cdot 10^8 \text{ bis } 2\cdot 10^9, \ldots \end{aligned}$$

Die Wahrscheinkeiten, dass die Goldbachsche Vermutung in diesen Intervallen scheitert, beträgt nach ähnlich konservativer Abschätzung wie oben:

$$10^{-4656}, 10^{-34100}, 10^{-261000}, \ldots.$$

Nun ist es recht beliebig gewesen, dass unser Argument mit n =2 000 000 begonnen hat. Die Goldbachsche Vermutung ist bereits bis zu $n = 4 \cdots 10^{14}$ verifiziert worden. Mit dieser Anfangszahl erhalten wir eine Wahrscheinlichkeit für das Scheitern der Goldbachschen Vermutung für Zahlen $n > 4 \cdot 10^{14}$ von grob $10^{150000000000}$.

Diese Wahrscheinlichkeit ist 1 zu einer Million Million Million ..., wobei man 25 000 000 000 mal Million zu sagen hat. Bei einer plausiblen Rate von drei Worten pro Sekunde würde es ungefähr 264 Jahre dauern, diese Wahrscheinlichkeit auszusprechen - das ist fast genau die Zeit, die vergangen ist, seitdem Goldbach seine berühmte Vermutung zuerst gemacht hat.

Anschrift des Verfassers
Neil Sheldon
The Manchester Grammar School
Manchester
England

nas@mgs.org