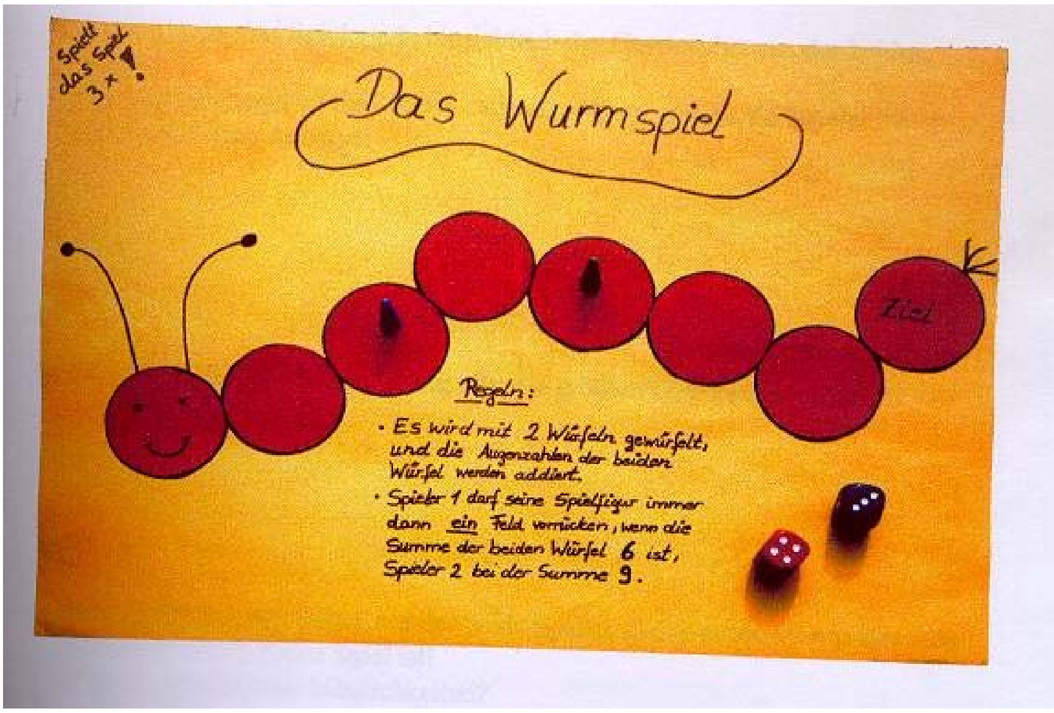
Grundschüler beurteilen ein Würfelspiel – Ein Erfahrungsbericht

BERND NEUBERT, GIEßEN

Zusammenfassung: *Zufallsphänomene kommen sehr häufig in unserem Leben vor. Auch Grundschulkinder werden außerhalb der Schule schon früh damit konfrontiert. Deshalb wird in verschiedenen Veröffentlichungen (vgl. u. a. Müller/Wittmann 1977, Grünewald 1991, Kütting 1994) die Forderung erhoben, stochastische Aufgaben schon in den Unterricht der Grundschule zu integrieren. Als Argumente dafür werden meist neben der bereits erwähnten frühen Begegnung mit Zufällen und Wahrscheinlichkeiten angeführt, dass vollständiges Verstehen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes Zeit braucht und eine kontinuierliche Beschäftigung mit diesem im Sinne des Spiralprinzips erfordert, und einfache Begriffe und Aussagen der Wahrscheinlichkeit besonders in jüngeren Schulklassen gut spielerisch-experimentell erschlossen werden können.*



Im Folgenden soll über einen Unterrichtsversuch berichtet werden, bei der das Verhalten von Schülern einer 4. Klasse bei einer Aufgabe zur Beurteilung der Gewinnchancen bei einem Würfelspiel untersucht wurde. Dabei bewerteten diese vorgegebene alternative Spielregeln und formulierten auch selbst solche und probierten sie aus. Die Schüler hatten keine Vorerfahrungen im Umgang mit stochastischen Aufgaben.

Als Spiel wurde „Das Wurmspiel" gewählt, ein Spiel mit 7 Feldern, bei dem mit zwei Würfeln gewürfelt wird. Zur Einstimmung auf die später folgenden Aufgaben spielten die Kinder das Spiel zunächst nach folgender Regel: *Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel **6** ist, Spieler 2 bei der Summe **9**.*

Eine für die Kinder wichtige Entscheidung zu Beginn des Spiels war, ob der jeweilige Spieler seine Spielfigur nur dann um ein Feld vorrücken darf, wenn er selbst die festlegte Summe würfelt oder auch dann, wenn dies sein Gegner tut. Die meisten Spielerpaare einigten sich auf die Regel, dass die Spielfigur dann gesetzt werden darf, wenn die jeweilige Summe gewürfelt wird, unabhängig von welchem Spieler. Es wurden jeweils drei Runden so lange gespielt, bis der erste Spieler am Kopf des Wurmes angekommen war. Durch dabei auftretende unterschiedliche Spielausgänge waren die Kinder gut auf das Bearbeiten der folgenden Aufgaben eingestimmt, die auf einem Arbeitsblatt formuliert waren.

Für das Spiel gibt es noch drei andere Spielregeln:

1. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 7 ist, Spieler 2 bei der Summe 3.
2. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 12 ist, Spieler 2 bei der Summe 8.
3. Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 4 ist, Spieler 2 bei der Summe 10.

a) Bewertet die drei Spielregeln hinsichtlich der Gewinnchancen der beiden Spieler. Welche Spielregel ist für Spieler 1 die günstigste, welche für Spieler 2?

Begründet Eure Antwort!

b) Formuliert eine Spielregel, bei der Ihr die größten Gewinnchancen habt!

c) Formuliert eine Spielregel, bei der beide Spieler gleich große Gewinnchancen haben und es ein faires Spiel ist!

Gibt es verschiedene Möglichkeiten?

Uns interessierte vor allem, ob die Schüler überhaupt in der Lage waren, sich mit diesen Aufgaben auseinander zu setzen und welche Vorgehensweisen sie für die Bearbeitung wählten. An der Untersuchung nahmen 22 Schüler einer vierten Klasse teil, die in 11 Zweiergruppen arbeiteten.

1 Schülerlösungen der Aufgaben

Bewertung von Spielregeln

Bei der Bewertung der drei Spielregeln hinsichtlich der Gewinnchancen der beiden Spieler haben alle elf Gruppen bei der ersten Spielregel die Würfelsumme 7 als wahrscheinlicher als die Würfelsumme 3 bewertet.

Bei der zweiten Spielregel wurde von zehn Gruppen die Würfelsumme 8 als wahrscheinlicher als die Würfelsumme 12 angesehen. Eine Gruppe bewertete diese Würfelsummen als gleich günstig für beide Spieler.

Die dritte Spielregel wurde von sieben Gruppen als gleich günstig für beide Spieler, von zwei Gruppen als günstiger für den ersten Spieler und von zwei Gruppen als günstiger für den zweiten Spieler bewertet.

Formulieren einer günstigen Spielregel

Alle elf Gruppen haben die Aufgabe, bei der nach einer Spielregel gefragt war, bei der sie selbst die größten Gewinnchancen haben, in dem Sinne bearbeitet, dass sie die Grundregeln des Wurmspieles übernommen und nur die Würfelsummen verändert haben, um so ihre eigenen Gewinnchancen so groß wie möglich zu gestalten.

Nachdem Verständnisprobleme geklärt waren, haben alle elf Gruppen eine Spielregel formuliert, bei der sie ihrer Meinung nach die größten Gewinnchancen haben. Neun der elf Gruppen haben dabei sich selbst und ihrem Gegner jeweils eine unterschiedliche Würfelsumme zugewiesen. Nur zwei Gruppen haben bei dieser Aufgabe mit mehreren Würfelsummen gearbeitet, wobei die eine Gruppe beiden Spielern mehrere Würfelsummen zugeordnet hat, die andere dagegen nur ihrem Gegner. Alle elf Gruppen sind jedoch der Meinung gewesen, dass die Würfelsumme bzw. Würfelsummen, die sie sich selbst zugeordnet haben, häufiger fallen als die ihres Gegners.

Am häufigsten (6 von 11 Gruppen) wurde die Regel *Spieler 1 erhält Würfelsumme 7 und Spieler 2 die Würfelsumme 2* genannt. Auffallend ist jedoch, dass keine der Gruppen ihrem Gegner die Würfelsumme 12 zugewiesen hat. Als weitere Regeln wurden genannt:

Spieler 1	*Spieler 2*
Würfelsumme 7	Würfelsumme 3
Würfelsumme 8	Würfelsumme 2
Würfelsumme 6	Würfelsumme 2
Würfelsumme 7	Augenzahlen beider Würfel müssen addiert oder subtrahiert 2 ergeben
Gerade Würfelsummen	Pasch

Finden einer fairen Spielregel

Bei der Aufgabe zum Finden einer fairen Spielregel musste zunächst der Begriff „Faires Spiel" geklärt werden. Alle elf Gruppen verstanden unter einer fairen Spielregel eine solche, bei der beiden Spielern Würfelsummen zugewiesen sind, die ihnen gleiche Gewinnchancen einräumen. Der Grund für die unterschiedlichen Antworten der Gruppen zu dieser Aufgabe liegt also nicht in einem falschen Verständnis von einem fairen Spiel, sondern in den verschiedenen Bewertungen der Würfelsummen. Insgesamt wurden 25 verschiedene Spielregeln angegeben. Unter diesen waren die folgenden, die beiden Spielern die gleichen Chancen einräumen:

Regel		Wie oft genannt?
Spieler 1	*Spieler 2*	
Würfelsumme 2	Würfelsumme 12	3x
Würfelsumme 3	Würfelsumme 11	2x
Würfelsumme 4	Würfelsumme 10	4x
Würfelsumme 5	Würfelsumme 9	1x
Würfelsumme 6	Würfelsumme 8	5x
Gleiche Würfelsummen		4x

Zu dieser Tabelle ist anzumerken, dass die Aufgabe auch zuließ, dass eine Gruppe mehrere „faire Regeln" nennen konnte. So fand eine Gruppe sechs „faire Regeln", während es drei Gruppen nicht gelang, auch nur eine einzige „faire Regel" zu finden. Neben weiteren konkreten Würfelsummen, die den Spielern unterschiedliche Chancen ermöglichen, wurde auch die Regel: „Spieler 1 – Gerade Zahl als Summe und Spieler 2 - Ungerade Zahl als Summe" genannt.

2 Begründungen und Strategien

Wir ließen in unserer Untersuchung nicht nur die Lösungen der Aufgaben von den Schülern angeben, sondern diese auch begründen bzw. wir beobachteten die Überlegungen der Schüler beim Finden der Ergebnisse.

Alle elf Gruppen haben bereits während des Spiels bemerkt, dass bestimmte Würfelsummen häufiger als andere vorkommen. Vor allem fiel den Kindern das häufige Würfeln der „Summe 7" auf. Zur Begründung wurden aber unterschiedliche Argumente gewählt. Drei Varianten der Begründung dominierten. Drei Gruppen haben ausschließlich mit *eigenen Wurfergebnissen* argumentiert, drei Gruppen haben mit der Feststellung gearbeitet, dass *mittlere Würfelsummen häufiger als zu hohe und zu niedrige Würfelsummen* fallen, und fünf Gruppen haben die *Zerlegungsmöglichkeiten* der einzelnen Würfelsummen als Begründung für ihre Bewertung der Spielregeln genutzt. Mitunter waren auch Mischformen aus diesen Vorgehensweisen zu beobachten.

Von den drei Gruppen, die zur Begründung ihrer Bewertung der drei Spielregeln *eigene Wurfergebnisse* heranzogen, nutzten zwei ausschließlich ihre eigenen Wurfergebnisse während der vorangegangenen Spielphase. Allerdings konnten sie keinen Grund für das häufige Fallen bestimmter Würfelsummen nennen. Diese Kinder haben sich bei allen drei Aufgaben ausschließlich an diesen Ergebnissen orientiert und keinerlei weitere Überlegungen angestellt, warum bestimmte Würfelsummen häufiger fallen als andere. Sie bearbeiteten die drei Aufgaben nacheinander, versuchten sich dabei zu erinnern, welche Würfelsummen sie selbst häufig gewürfelt hatten, und trafen daraufhin eine Entscheidung für bestimmte Summen.

Die dritte dieser Gruppen bezog sich für die Beantwortung der drei Aufgaben nicht auf ihre Wurfergebnisse aus der vorangegangenen Spielphase. Statt dessen griffen Angelina und Sonja während der Bearbeitung der ersten Aufgabe erneut zu den zwei Würfeln, würfelten dreißigmal und hielten ihre Ergebnisse in einer *Strichliste* fest. In dieser Liste vermerkten sie aber nur die Häufigkeiten für die sechs Würfelsummen, die in den drei Spielregeln der Aufgaben des Arbeitsblatts vorkamen. Mit Hilfe dieser Liste haben die beiden nicht nur die Spielregeln aus Aufgabe a bewertet, sondern auch die zwei folgenden Aufgaben gelöst. Bei Aufgabe b haben sie sich selbst diejenige Würfelsumme zugewiesen, die bei ihren dreißig Würfen am häufigsten gefallen ist. Für ihren Gegner haben sie sich für die Würfelsumme 2 entschieden, „da man für diese einen „Pasch“ benötigt“. Für die Formulierung einer fairen Spielregel verwendeten die Mädchen die zwei meist gewürfelten Summen (Spieler 1- Würfelsumme 8, Spieler 2 – Würfelsumme 6). Die Tatsache, dass bei ihren dreißig Würfen keine zwei Würfelsummen gleich häufig gefallen sind, haben sie als nicht entscheidend bewertet. Sie haben auch nicht bemerkt, dass sie in ihrer Strichliste nur sechs der elf möglichen Würfelsummen festgehalten haben und damit eine Einschränkung des Ergebnisraumes vornahmen. Anschließend hat diese Gruppe, ausgehend von ihren eigenen Wurfergebnissen Aussagen über die Stellung der verschiedenen Würfelsummen in einer „Wahrscheinlichkeitsordnung“ hergeleitet und bei der Bewertung der Spielregeln angewendet.

Bei der Begründung mit Hilfe der Feststellung, dass *mittlere Würfelsummen häufiger als zu hohe und zu niedrige Würfelsummen* fallen, trat das Problem auf, was eine niedrige, mittlere bzw. hohe Würfelsumme ist. Während zwei der Gruppen die Würfelsummen 4 und 10 nicht mehr zu den mittleren Würfelsummen gezählt haben, hat die dritte Gruppe die Würfelsumme 4 als sehr günstig bewertet. Ihre Definition von mittleren Würfelsummen umfasste die Würfelsummen 4 bis 8. Diese Gruppe hat außerdem die Begründung geliefert, dass das Werfen bestimmter Würfelsummen abhängig von der Beschaffenheit der Würfel sei. Schwere, langsam rollende Würfel würden nur schwer niedrige Würfelsummen erzeugen. Erklärungen dieser Art nahmen teilweise auch andere Gruppen vor.

Obwohl alle drei Gruppen vereinzelte Zerlegungen bestimmter Würfelsummen genannt hatten, haben sie die größere Wahrscheinlichkeit mittlerer Würfelsummen nicht explizit mit der größeren Anzahl von Zerlegungsmöglichkeiten dieser Würfelsummen begründen können. Nur eine Gruppe hat bemerkt, dass es für die Würfelsumme 7 mehr Möglichkeiten als für die Würfelsumme 12 gibt, jedoch nicht deren genaue Anzahl bestimmt.

Fünf Gruppen haben ihre Bewertung der drei Spielregeln mit Hilfe der *Zerlegungsmöglichkeiten* begründet, die sie für die verschiedenen Würfelsummen gefunden hatten. Durch das Vergleichen der pro Würfelsumme möglichen Anordnungen haben diese Gruppen Rückschlüsse auf die Gewinnchancen jeder Würfelsumme gezogen.

Drei dieser Gruppen haben allerdings nicht bemerkt, dass die Würfelsummen durch die geordneten Paare der gewürfelten Zahlen charakterisiert werden und haben daher nicht alle möglichen Anordnungen für die sechs vorkommenden Würfelsummen gefunden.

Zwei Gruppen haben alle pro Würfelsumme möglichen Anordnungen gefunden. Besonders fiel dabei das Vorgehen von Nadja und Dominik beim Lösen der Aufgaben auf. Nadja deutete bei der Bewertung der ersten Spielregel, vermutlich, weil diese beim Spielen häufig vorkam, auf die „Würfelsumme 7“ als günstig für Spieler 1. Dominik bestätigte dies und begann alle möglichen Zerlegungen der Zahl 7 aufzuzählen. Die Argumentation über die Anzahl der möglichen Zerlegungen der jeweiligen Würfelsumme machte er zur Grundlage für seine weiteren Überlegungen. Als er die gleiche Anzahl von Möglichkeiten für die Würfelsummen 4 und 10 und die daraus folgende Chancengleichheit für beide Spieler bei Spielregel 3 herausgefunden hatte, drückte er dies durch Aufsagen des Abzählreims „Ene mene muh und raus bist du“ aus und meinte: „Ich nehme die 10“. Auf Nachfragen bestätigte er, dass beide Spieler gleiche Chancen haben. Beim Festlegen der für seine Gruppe günstigsten Regel (Aufgabe b) entschied er sich für die Würfelsumme 7: „Die Sieben ist immer am günstigsten.“ Auf die Frage, welche Würfelsumme er ihrem Gegner zuweist, schlug Dominik Nadja die Würfelsumme 4 vor mit den Worten: „Wir wollen nicht zu unfair sein.“ Ihm war sicher bewusst, dass dies nicht die ungünstigste Regel für seinen Gegenspieler war. Auf den Hinweis der Versuchsleiterin, die Regel so unfair wie möglich festzulegen, schlugen Nadja und Dominik fast gleichzeitig die „Eins“ vor. Sie erkannten aber sehr schnell, dass die Summe 1 niemals gewürfelt werden kann und einigten sich auf die Summe 2 für ihren Gegenspieler. Bei der Suche nach einer fairen Spielregel (Aufgabe c) suchte Dominik zunächst nach einer Spielregel, in der die Würfelsumme 7 vorkommt. Er bemerkte rasch, dass dies nicht geht. Da er mittlerweile alle möglichen Zerlegungen der einzelnen Würfelsummen notiert hatte, konnte er schnell diejenigen Würfelsummen für eine Spielregel nutzen, die gleich viele Zerlegungen haben. Zum Abschluss seiner Überlegungen betonte er nochmals, dass es für die „Würfelsumme Sieben“ die meisten Zerlegungen gibt und sagte: „Die Sieben ist alleine.“ Übrigens warf Dominik während des ersten Spieldurchgangs die Frage auf: „Was hat das mit Mathe zu tun?“. Diese konnte er nun sehr gut selbst beantworten.

Während Dominik und Nadja ausschließlich die Zerlegungsmöglichkeiten als Grundlage für die Bewertung bzw. Suche der Spielregeln nutzten, war dieses Vorgehen bei den anderen Gruppen nicht mit gleicher Konsequenz zu beobachten. Häufig wurde der Fehler gemacht, die beiden Zerlegungen einer Zahl aus den gleichen Summanden nur als eine zu betrachten. Diese Schüler fanden zum Beispiel für die Zahlen 7 und 8 gleich viele Zerlegungen. Auch herrschte mitunter Unsicherheit hinsichtlich der Aussagekraft der Argumentation mit Hilfe der Zerlegungen. Dies fiel besonders bei Michael und Tobias auf. Die Jungen bewerteten die dritte Spielregel als günstiger für den zweiten Spieler, obwohl sie sowohl für die Würfelsumme 4 als auch für die Würfelsumme 10 drei Zerlegungsmöglichkeiten gefunden hatten. Als Begründung verwiesen sie darauf, dass die Würfelsumme 10 bei ihren eigenen Spielen häufiger gefallen sei. Sie schenkten ihren eigenen Erfahrungen also mehr Gewicht als den theoretischen Überlegungen, um eine definitive Aussage über die Wahrscheinlichkeiten treffen zu können.

3 Schlussfolgerungen aus der Untersuchung

Die Ergebnisse unseres Versuchs lassen den Schluss zu, dass ein Würfelspiel ein geeigneter Inhalt ist, um Schüler der 4. Klasse an Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung heranzuführen. Sie haben Begeisterung am Spielen und sind auch in der Lage, sich Gedanken über mögliche Gewinnchancen zu machen. Begründungen für die Überlegungen sind aber nur teilweise vollständig. Argumente aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik sind überlagert mit Gedanken, die auf einem ganz anderen Hintergrund basieren. Da diese auch leicht zu Fehlvorstellungen führen können, erscheint es sinnvoll, auch schon zu einem solch frühen Zeitpunkt mit der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beginnen (vgl. dazu Müller / Wittmann 1977, S. 238)

Besonders auffällig erschien uns, dass zur Begründung sowohl „klassisch-kombinatorische Argumente“ (Argumentation mit Zerlegungsmöglichkeiten für einzelne Würfelsummen) als auch „empirisch-statistische Argumente“ (Argumentation mit auftretenden Häufigkeiten bestimmter Summen beim eigenen Würfeln) verwendet wurden.

Für die Behandlung im Unterricht sollten deshalb die intuitiven Vorkenntnisse der Schüler Ausgangspunkt sein. Es gibt unseres Erachtens keinen Grund, Schülern ein fertiges Modell vorzusetzen, wenn sie selbst in der Lage sind, ein solches zu gewinnen. Auf Grund der unterschiedlichen Argumentationen der Schüler erscheint es weiterhin sinnvoll, Kinder sowohl auf dem empirisch-statistischen als auch den klassisch-kombinatorischen Weg an den Wahrscheinlichkeitsbegriff heranzuführen.

Anmerkung: Mein Dank gilt Frau Anne Weil, die die empirische Untersuchung im Rahmen ihrer Wissenschaftlichen Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen durchgeführt hat.

Literatur

Müller, Gerhard und Wittmann, Erich (1977) Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg.

Grünewald, Renate: Spielen mit der Wahrscheinlichkeit. – In: Didaktik der Mathematik 1991 (3), S. 171 – 177.

Kütting, Herbert (1994): Didaktik der Stochastik. Mannheim: Bibl. Institut.

Anschrift des Autors
Bernd Neubert
Justus-Liebig-Universität Gießen
Institut für Didaktik der Mathematik
Karl-Glöckner-Str. 21 C
35394 Gießen