Die Geburt der Stochastik
- Historische Dokumente

Anhang zum Artikel, veröffentlicht in
Stochastik in der Schule **19**(1999), Nr. 3, 1-30

Helmuth Wirths, Oldenburg

Kurzfassung des Artikels:
Wer versucht, Geschichte der Mathematik in den Unterricht mit einzubeziehen, trifft meist auf reges Interesse bei den Schülerinnen und Schülern. In diesem Aufsatz wird Material dargestellt, das im Zusammenhang mit der Frage nach den Anfängen der Stochastik als selbständiges Gebiet innerhalb der Mathematik zusammengestellt wurde. Der Beitrag gliedert sich nach Fragen, die von Lernenden häufig gestellt werden: Welche Personen waren beteiligt? Welche Probleme wurden damals diskutiert? Worin bestand das Neuartige? Warum setzt man die Geburt der Stochastik im Jahr 1654 an? Gab es vorher keine Stochastik oder kein stochastisches Denken? Am Ende dieses Beitrags werden Vorschläge zur Einbettung in den Unterricht gemacht.

Hier sollen nun die historischen Dokumente, die aus Platzmangel in der Zeitschrift nicht veröffentlicht werden konnten, wiedergegeben werden.

Das Verteilungsproblem - Dokument 1

Aus: Fra Luca Pacioli, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, Venedig 1494

Eine Gesellschaft spielt Ball auf 60 Punkte, wobei 10 Punkte für das Einzelspiel vergeben werden. Sie setzen insgesamt 10 Dukaten ein. Aufgrund gewisser Umstände können sie nicht zu Ende spielen; dabei hat eine Partei 50 und die andere 20 Punkte. Man fragt, welcher Anteil des Einsatzes jeder Partei zusteht.

Für dieses Problem habe ich verschiedene Lösungsvorschläge, die in die eine oder andere Richtung gehen, vorgefunden; alle kommen mir ungereimt vor in bezug auf einige ihrer Argumente. Aber die Wahrheit ist das, was ich sagen werde, zusammen mit dem richtigen Weg. Ich sage, daß Du diesen in drei Weisen verfolgen kannst.

Erstens: Du sollst herausfinden, wie viele Einzelspiele insgesamt von den beiden Parteien höchstens gemacht werden können; dies sind 11, nämlich dann, wenn beide vorher je 50 Punkte aufweisen. Nun siehst Du, welchen Anteil an allen diesen Einzelspielen die mit 50 Punkten haben; sie haben nämlich $\frac{5}{11}$; und diejenigen mit 20 Punkten haben $\frac{2}{11}$. Deshalb kann die eine Partei $\frac{5}{11}$ und die andere $\frac{2}{11}$ vom Einsatz nehmen. Summiert macht das $\frac{7}{11}$. Dann entsprechen $\frac{7}{11}$ den 10 Dukaten; was steht einer Partei mit dem Anteil $\frac{5}{11}$ und was einer mit $\frac{2}{11}$ zu? Also derjenigen mit 50 Punkten wird $7\frac{1}{7}$ Dukaten und derjenigen mit 20 Punkten $2\frac{6}{7}$ Dukaten zukommen. Fertig.

Eine andere Weise ist ähnlich: d. h. sie können insgesamt 110 Punkte machen. Schau, welcher Teil davon 50 ist; Du wirst, wie oben, $\frac{5}{11}$ und für 20 entsprechend $\frac{2}{11}$ finden; mach' weiter wie oben !

Die dritte, sehr kurze Weise ist, daß Du summierst, was die beiden Parteien zusammen haben: d.h. 50 und 20, macht 70. Und dieses ist der Divisor, wobei 70 den 10 Dukaten entsprechen. Was steht der Partei mit 50 Punkten und was der mit 20 Punkten zu? Usw.

Und so wirst Du vorgehen bei einem Rennen zu Fuß oder zu Pferd, wenn Du weißt, wie viele Meilen jeder gemacht hat. Und ähnlich ist es beim Morraspiel mit 10 oder mit 5 Fingern, wenn die eine Partei 9 und die andere 7 Punkte hat. Das gilt auch, wenn sie Bogen schießen; wer als erster soundsoviele Treffer erzielt, erhält den Preis.

Das Verteilungsproblem - Dokument 2

Aus: Hieronymus Cardanus, Practica arithmetice et mensurandi singularis, Mailand 1539

Letztes Kapitel "Über die Fehler des Fra Luca", Abschnitt 5:

Bei der Berechnung der Spiele schoß er einen gewaltigen, sogar von einem Knaben erkennbaren Bock, wobei er andere kritisiert und seine Meinung als ausgezeichnet lobt. Dabei gibt er, wenn zwei auf 6 Gewinnspiele spielen, dem, der 5 hat, und dem anderen mit 2 nach vielen überflüssigen Überlegungen 5 bzw. 2 Teile, so daß er die Gesamtsumme in 7 Teile teilt.

Nehmen wir deshalb an, daß zwei auf 19 Gewinnspiele spielten und einer 18, der andere nur 9 hätte. Er wird dann dem ersten $\frac{2}{3}$ der Gesamtsumme und $\frac{1}{3}$ dem zweiten geben. Sei also der Einsatz 12 Goldstücke; die Summe von beiden wird 24 sein, von denen 16 dem ersten und 8 dem zweiten zustehen: Jener, der 18 Gewinnspiele aufweist, hat nur 4 Goldstücke von seinem Gegner gewonnen, was ein Drittel des Einsatzes ausmacht, und doch fehlt ihm zum vollständigen Gewinn nur ein Spiel, während dem zweiten 10 fehlen. Das aber ist völlig absurd.

Außerdem darf jeder jenen Teil nehmen, den er nach einer billigen Überlegung unter dieser Voraussetzung einsetzen könnte; aber der, der 18 hat, kann mit dem, der 9 hat, 10 zu 1, ja sogar 20 zu 1 bei einem Spiel auf 19 setzen: Deswegen hat er bei der Teilung einen Anspruch auf 20 Teile und der andere nur auf einen.

Drittens, wenn man auf 19 spielt und einer 2, der andere kein Spiel hat, kann nach seiner Überlegung der, der 2 hat, den Gesamteinsatz beanspruchen; das wird aus seiner Berechnung klar. Daß dies, so wie es ist, unangemessen ist, ist aber nicht zu bestreiten, da er bei einem so bescheidenen Vorsprung und einer solchen Entfernung vom Ziel genausoviel beanspruchen könnte, wie wenn er 19 Spiele gewonnen hätte, und weil weiterhin derjenige, der den Einsatz verliert, in keine schlechtere Lage kommen kann; angenommen, daß der erste 18 und der zweite kein Gewinnspiel aufwiese, stünde dem Führenden noch nicht alles zu, weil ja sonst das letzte Gewinnspiel überflüssig wäre; um wieviel weniger kann der das Ganze beanspruchen, der nur zwei Gewinnspiele aufweist.

Viertens zum Hauptpunkt: Wenn einer 3, der andere 1 Gewinnspiel bei einem Spiel auf 13 aufwiese, stünden dem ersten 3 Teile, dem zweiten stünde einer zu. Wenn nun der erste 12, der zweite 9 hätte, würden dem ersten $\frac{4}{7}$ und dem zweiten $\frac{3}{7}$ gegeben werden, und so wäre die Voraussetzung des ersten im zweiten Fall wesentlich ungünstiger als im ersten, was vollkommen absurd ist, weil der erste im zweiten Fall bei 6 Malen nicht einmal verliert und im ersten Fall keine große Ungleichheit herrscht.

Das Verteilungsproblem - Dokument 3

Aus: Hieronymus Cardanus, Practica arithmetice et mensurandi singularis, Mailand 1539

13. Was nun die Theorie der Spiele angeht, muß man wissen, da ß man bei den Spielen nur die jeweilige Restspielanzahl in Betracht ziehen muß, indem man den Gesamteinsatz in der Progression ["Die Progression von n" bedeutet "Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n"] auf die entsprechenden Teile verteilt.

Zum Beispiel spielen zwei auf zehn Gewinnspiele. Einer hat 7, der andere 9 Spiele gewonnen. Man fragt nun im Fall der Teilung bei Spielabbruch, wieviel jeder haben soll. Ziehe 7 von 10 ab; es bleiben 3. Ziehe 9 von 10 ab; es bleibt 1. Die Progression von 3 ist 6. Die Progression von 1 ist 1. Du wirst also den Gesamteinsatz in 7 Teile teilen und dem, der 9 Gewinnspiele hat, 6 Teile, sowie dem, der 7 Gewinnspiele hat, 1 Teil geben. Nehmen wir also an, daß jeder 7 Goldstücke gesetzt hat, dann wäre der Gesamteinsatz 14, von denen 12 dem, der 9 Gewinnspiele hat, zufallen und 2 dem, der 7 hat, weshalb der, der 7 hat, $\frac{5}{}$ des Kapitals verliert.

Ein weiteres Beispiel: Nehmen wir an, daß auf 10 Gewinnspiele gespielt werde und einer 3, der andere 6 hätte. Subtrahiere und es bleiben die Reste 7 und 4. Die

Progression von 7 ist 28. Die Progression von 4 ist 10. Deshalb werde ich dem, der 6 Gewinnspiele hat, von der Gesamtsumme 28 Teile geben, und dem, der 3 hat, werde ich 10 Teile geben; so teile ich den Gesamteinsatz in 38 Teile, und der, der 3 hat, verliert $\frac{9}{19}$ seines Kapitals.

14. Der Beweisgedanke dafür ist folgender: Wenn nach erfolgter Teilung wiederum ein Spiel angefangen werden müßte, hätten die Parteien dasselbe einzusetzen, was sie unter der vorliegenden Bedingung erhielten. Diese sei im ersten Beispiel, daß einer sagt, ich will spielen unter der Bedingung, daß du das Gesamtspiel nicht gewinnen kannst, es sei denn, du gewinnst 3 mal ohne Unterbrechung, und, wenn ich ein Spiel gewinne, will ich das Gesamtspiel gewinnen. Derjenige, der 3 Spiele gewinnen will, setzt 2 Goldmünzen. Wieviel muß der andere einsetzen? Ich behaupte, daß er 12 einsetzen wird.

Begründung: Wenn sie nur ein Gewinnspiel benötigten, genügte es, 2 einzusetzen, und bei 2 Gewinnspielen hätte er das Dreifache einzusetzen. Der Grund dafür ist, daß, wenn er einfach die nächsten 2 Spiele gewänne, er 4 Goldstücke gewinnen würde, während er nach dem Gewinn des ersten Gefahr läuft, das zweite Spiel zu verlieren; deswegen muß er das Dreifache gewinnen; und wenn er auf 3 Gewinnspiele spielte, das Sechsfache, weil sich das Risiko verdoppelt; deswegen hätte er 12 einzusetzen. Nun hat er schon 12 erhalten und jener 2; deswegen ist die Teilung angemessen durchgeführt unter der Voraussetzung, daß der Spielabbruch im Einverständnis der Parteien erfolgte; sonst, wenn der Abbruch durch den, der mehr hat, verursacht wurde, wird zu gleichen Teilen geteilt, wenn er durch den, der weniger hat, verursacht wurde, verliert der den ganzen Einsatz.

Das Verteilungsproblem - Dokument 4

Aus: Nicolò Tartaglia, La Prima Parte del General Trattato di Numeri, et Misure; Venedig 1556

Bruder Luca aus Borgo legt folgendes Problem vor: Eine Gesellschaft spielt Ball auf 60 Punkte. ... (*Es folgt die Problembeschreibung)*

In diesem Problem sagt der genannte Bruder Luca, der für die eine wie die andere Richtung verschiedene Lösungsvorschläge vorfand, daß ihm aber all ihre Argumente ungereimt erscheinen und daß die richtige Methode und die Wahrheit diejenige sei, daß man die Rechnung in dreifacher Weise durchführen kann.

... (*Es wird nun die erste Rechnung von Fra Luca vorgeführt.*)

Diese seine Regel scheint mir weder schön noch gut zu sein. Denn wenn zufällig eine der Parteien 10 Punkte und die andere nichts hätte und man nach seiner Regel vorgehen würde, würde sich ergeben, daß die Partei mit den besagten 10 Punkten alles nehmen und die andere überhaupt nichts nehmen dürfte, was vollkommen sinnlos wäre, daß man mit 10 das Ganze nehmen dürfte.

Und deshalb sage ich, daß ein solches Problem eher juristisch als durch die Vernunft gelöst wird; egal, auf welche Art und Weise man es löst, es gibt immer einen Grund zu streiten. Nichtsdestotrotz erscheint mir die am wenigsten anfechtbare Lösung die folgende: Man stelle zunächst fest, welchen Anteil jeder vom Gesamtspiel hat, d. h. wenn einer zufällig 10 und der andere 0 hat, hätte also derjenige, der 10 hat, ein Sechstel des Gesamtspiels; und deshalb sage ich, daß er in diesem Fall ein Sechstel der Dukaten bekommen müßte, die sie pro Mann eingesetzt haben; d. h. wenn man 22 Dukaten pro Partei einsetzt, müßte er ein Sechstel besagter 22 Dukaten, nämlich $3\frac{2}{3}$ Dukaten erhalten, die zusammen mit seinen 22 Dukaten $25\frac{2}{3}$ Dukaten ausmachen, und die andere Partei darf den Rest nehmen, und dieser Rest ist $18\frac{1}{3}$ Dukaten. Wenn nun die eine Partei 50 und die andere 30 hätte, müßte man 30 von 50 abziehen. Es bleiben 20, und diese 20 sind ein Drittel des Gesamtspiels. Deshalb dürfte man (außer seinem eigenen Anteil) auch ein Drittel des Geldes der anderen Partei nehmen, und dieses Drittel sind $7\frac{1}{3}$ Dukaten, die zusammen mit seinen eigenen insgesamt $29\frac{1}{3}$ Dukaten ausmachen. Die andere Partei dürfte den Rest, nämlich $14\frac{2}{3}$ Dukaten, nehmen. Wenn man so verfährt, ergibt sich als Folge nichts Unangenehmes wie bei der Lösung von Bruder Luca.

Eine der anderen beiden von dem vorgenannten Bruder Luca vorgeschlagenen Vorgehensweisen ist der oben beschrieben Lösung ähnlich, wenn auch in den Worten etwas verschieden, und ähnlich ist auch die dritte. ... (*Die dritte Lösung wird nun vorgeführt.*)

Bei dieser Lösung ergeben sich dieselben Einwände, die ich gegen die erste erhoben habe, und da diese Probleme nur Streit hervorrufen und zu nichts führen, soll man ihnen keine große Bedeutung beimessen.

Das Verteilungsproblem - Dokument 5

Aus dem Brief von Pascal an Fermat. Mittwoch, den 29. Juli 1654

Mein Herr,

1. Die Ungeduld erfaßt mich ebenso wie Sie und, obgleich ich noch im Bett liege, muß ich Ihnen unbedingt mitteilen, daß ich gestern abend von Herr de Carcavi Ihren Brief über das Teilungsproblem erhielt, den ich so sehr bewundere, daß ich es nicht in Worte fassen kann. Ich habe nicht die Zeit, mich weitläufig auszulassen, aber Sie haben - mit einem Wort - die beiden Teilungen beim Würfeln und beim Spielabbruch vollständig richtig gefunden: ich bin damit gänzlich befriedigt; denn ich zweifle nun nicht mehr daran, daß ich auf dem richtigen Weg bin nach der erstaunlichen Übereinstimmung, in der ich mich mit Ihnen finde.

Ich bewundere die Lösungsmethode beim Spielabbruch mehr als die für die Würfel; ich habe einige Personen die für die Würfel finden sehen, wie Herrn Chevalier de Méré, der mir übrigens diese Probleme vorgelegt hat, und auch Herrn de Roberval; aber Herr de Méré hat niemals den richtigen Wert beim Spielabbruch und auch keinen Ansatz, um dahin zu gelangen, finden können, so daß ich mich für den einzigen hielt, dem dieses Verhältnis bekannt war.

2. Ihre Methode ist sehr sicher und ist diejenige, die mir als erste bei dieser Untersuchung einfiel; weil aber der Aufwand mit den Kombinationen zu groß ist, habe ich dafür eine Vereinfachung, eigentlich eine andere, viel kürzere und klarere Methode gefunden, die ich Ihnen hier in wenigen Worten darstellen möchte: Denn ich möchte Ihnen von nun an, wenn möglich, mein Herz öffnen, so sehr freut es mich, uns in Übereinstimmung zu sehen. Ich sehe wohl, daß die Wahrheit in Toulouse und in Paris dieselbe ist.

Das Verteilungsproblem - Dokument 6

Aus dem Brief von Pascal an Fermat. Mittwoch, den 29. Juli 1654

Hier nun in etwa, wie ich den Wert jedes einzelnen Spiels bestimme, wenn zwei Spieler beispielsweise auf drei Gewinnsätze spielen und jeder 32 Pistoles [Name für eine von Philipp II. 1566 geprägte Goldmünze] eingesetzt hat:

Nehmen wir an, daß der erste zwei und der andere eine Partie gewonnen hat; sie spielen nun eine Partie, deren Ausgang folgendes festlegt: Wenn der erste sie gewinnt, gewinnt er den gesamten Spieleinsatz, nämlich 64 Pistoles; wenn der zweite sie gewinnt, steht es zwei Partien zu zwei Partien, und folglich muß jeder seinen Einsatz, nämlich 32 Pistoles, zurücknehmen, falls sie sich trennen wollen.

Beachten Sie nun, mein Herr, daß dem ersten 64 zustehen, wenn er gewinnt; wenn er verliert, stehen ihm 32 zu. Wenn sie also diese Partie nicht wagen und sich, ohne zu spielen, trennen wollen, muß der erste sagen: "32 Pistoles sind mir sicher, denn die erhalte ich selbst bei Verlust; aber was die anderen 32 betrifft, vielleicht werde ich sie erhalten, vielleicht werden Sie sie erhalten, die Aussichten sind gleich. Teilen wir diese 32 Pistoles zu gleichen Teilen und geben Sie mir meine 32, die mir sicher sind." Er wird also 48 Pistoles erhalten und der andere 16.

Nehmen wir jetzt an, daß der erste zwei Partien gewonnen hat und der andere keine und daß sie eine weitere Partie beginnen. Der Ausgang dieser Partie legt fest, daß der erste, wenn er sie gewinnt, das ganze Geld, 64 Pistoles, nimmt; gewinnt sie der andere, dann sind sie wieder beim vorhergehenden Fall angelangt, bei dem der erste zwei Partien und der andere eine gewonnen hat. Nun haben wir schon gezeigt, daß in diesem Fall dem, der zwei Partien gewonnen hat, 48 Pistoles zustehen. Deshalb muß er, falls sie diese Partie nicht spielen wollen, sagen: "Wenn ich sie gewinne, gewinne ich alles, das sind 64; wenn ich sie verliere, stehen mir rechtmäßig 48 zu: Geben Sie mir also die 48, die mir selbst für den Fall, daß ich verliere, gewiß sind, und teilen wir die anderen 16 zu gleichen Teilen, weil die Chance, diese zu gewinnen, für Sie genauso groß ist wie für mich." Er wird also 48 und 8, das sind 56 Pistoles, erhalten.

Nehmen wir endlich an, daß der erste nur eine Partie gewonnen hat und der andere keine. Sie sehen, mein Herr: wenn sie eine neue Partie beginnen, legt deren Ausgang fest, da ß, wenn der erste gewinnt, es zwei zu null steht und ihm mithin nach dem vorhergehenden Fall 56 Pistoles zustehen; verliert er sie, steht es eins zu eins: ihm stehen also 32 Pistoles zu. Er muß also sagen: "Wenn Sie die Partie nicht spielen wollen, geben Sie mir 32 Pistoles, die mir sicher sind, und teilen wir den von 56 verbleibenden Rest zu gleichen Teilen. Nehmen Sie 32 von 56 weg, es bleiben 24; teilen Sie also 24 zu gleichen Teilen; nehmen Sie davon 12 weg und ich 12, was mit 32 zusammen 44 macht." Auf diese Weise sehen Sie nur aufgrund einfacher Subtraktionen, daß ihm für die erste Partie 12 Pistoles, für die zweite Partie weitere 12 und für die letzte 8 vom Geld des anderen zustehen.

Das Verteilungsproblem - Dokument 7

Aus dem Brief von Pascal an Fermat. Montag, den 24. August 1654

Mein Herr, ...

2. Dies ist Ihr Vorgehen, wenn es zwei Spieler sind:

Wenn zwei Spieler, die auf mehrere Gewinnspiele spielen, sich in der Lage befinden, daß dem ersten zwei und den zweiten drei Gewinnspiele fehlen, so muß man, sagen Sie, für die gerechte Aufteilung des Einsatzes schauen, nach wie vielen Partien das Spiel in jedem Fall zu Ende entschieden sein wird.

Es ist leicht zu überlegen, daß das nach vier Partien der Fall sein wird. Daraus schließen Sie, daß man feststellen müsse, wie viele Anordnungen von Spielausgängen es bei vier Partien und zwei Spielern gibt, und weiterhin, wie viele Anordnungen den ersten Spieler und wie viele den zweiten zum Gewinner machen, und daß man den Einsatz diesem Verhältnis entsprechend teilen müsse. Ich hätte gerade diese Überlegung nur schwerlich verstanden, wenn ich sie mir nicht schon vorher selbst klargemacht hätte; Sie haben sie wohl auch in diesem Sinn niedergeschrieben. Um nun zu sehen, wie viele Anordnungen bei vier Partien und zwei Spielern existieren, muß man sich vorstellen, daß sie mit einem Würfel mit zwei Seiten spielen (weil es nur zwei Spieler gibt), wie bei Wappen oder Zahl, und daß sie vier dieser Würfel werfen (weil sie vier Partien spielen); und jetzt muß man überlegen, wie viele verschiedene Lagen diese Würfel einnehmen können. Das ist leicht zu berechnen: sie können sechszehn haben, das ist die zweite Potenz von vier, d. h.

das Quadrat. Denn stellen wir uns vor, daß eine der Seiten, mit a gekennzeichnet, für den ersten Spieler günstig ist und die andere, mit b, für den zweiten, dann können diese vier Würfel eine dieser sechzehn Lagen einnehmen:

Würfel 1	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
Würfel 2	a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
Würfel 3	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
Würfel 4	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Gewinner	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Und weil dem ersten Spieler zwei Partien fehlen, lassen ihn alle Lagen mit mindestens zwei a gewinnen: davon gibt es 11 für ihn; und weil dem zweiten hier drei Partien fehlen, lassen ihn alle Lagen, in denen mindestens drei b vorhanden sind, gewinnen; davon gibt es also 5. Somit müssen sie den Einsatz im Verhältnis von 11 zu 5 teilen.

Das ist Ihre Methode, wenn es zwei Spieler sind; dazu behaupten Sie, daß es falls es mehrere sind, nicht schwer sei, das Teilungsproblem nach der gleichen Methode zu lösen.

3. Dazu habe ich Ihnen zu sagen, mein Herr, daß diese Teilung auf der Basis der Kombinationen für zwei Spieler durchaus richtig und sehr gut ist; aber bei mehr als zwei Spielern ist sie nicht immer richtig, und ich werde Ihnen den Grund für diesen Unterschied nennen. ...

Das Verteilungsproblem - Dokument 8

Aus dem Brief von Fermat an Pascal. Freitag, den 25. September 1654

Mein Herr, ...

Ich nehme das Beispiel mit den drei Spielern, von denen dem ersten eine und jedem der beiden anderen zwei Partien fehlen; das ist der Fall, den Sie mir entgegenhalten. ...

3. ... Aber weil Herr de Roberval sich vielleicht freut, eine Lösung ohne eine zusätzliche Annahme zu sehen, die außerdem in vielen Fällen die Lösungswege abzukürzen vermag, sei sie hier für das vorliegende Beispiel angeführt:

Der erste kann entweder mit einer einzigen oder mit zwei oder drei Partien gewinnen.

Wenn er mit einer einzigen Partie gewinnt, muß er mit einem Würfel, der drei Seiten hat, die für ihn günstige beim ersten Wurf werfen. Ein einziger Würfel weist drei Möglichkeiten auf: dieser Spieler besitzt also $\frac{1}{3}$ der Gewinnmöglichkeiten, wenn man nur eine Partie spielt.

Wenn man deren zwei spielt, kann er auf zwei Arten gewinnen, entweder wenn der zweite Spieler die erste und er die zweite oder wenn der dritte die erste und er die zweite Partie gewinnt. Nun weisen aber zwei Würfel 9 Möglichkeiten auf; dieser Spieler besitzt also $\frac{2}{9}$ der Gewinnmöglichkeiten, wenn man zwei Partien spielt.

Wenn man deren drei spielt, kann er nur auf zwei Arten gewinnen, entweder wenn der zweite die erste, der dritte die zweite und er die dritte oder wenn der dritte die erste, der zweite die zweite und er die dritte Partie gewinnt; denn wenn der zweite oder der dritte Spieler die beiden ersten gewönnen, gewönne dieser und nicht der erste Spieler das Spiel. Nun weisen aber drei Würfel 27 Möglichkeiten auf; also besitzt der erste Spieler $\frac{2}{27}$ der Gewinnmöglichkeiten, wenn man drei Partien spielt. Die Summe der Gewinnmöglichkeiten für den ersten Spieler ist folglich $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, das macht zusammen $\frac{17}{27}$.

Die Methode ist also richtig und allgemeingültig in allen Fällen, so daß, ohne Zuhilfenahme einer zusätzlichen Annahme, die für jede Anzahl von Partien vorliegenden Kombinationen die Lösung enthalten und das einsichtig machen, was ich am Anfang gesagt habe, daß nämlich die Ausdehnung auf eine bestimmte Anzahl von Partien nichts anderes bedeutet, als die verschiedenen Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen. Das war in Worten das ganze Geheimnis, das uns zweifellos wieder ins gute Einvernehmen setzen wird, weil wir beide nur die logische Wahrheit suchen.