Erfahrungen mit einer Leistungskurs-Abituraufgabe

Barbara Ringel, Bielefeld

Zusammenfassung: Vorgestellt werden für die Aufgabe die unterrichtlichen Voraussetzungen, die Aufgabenstellung, eine kurze Darstellung einer möglichen Lösung, die Ergebnisse der Arbeit sowie einige Antworten der Schülerinnen und Schüler.

1. Unterrichtliche Voraussetzungen

Stochastik war in diesem Leistungskurs Thema des Halbjahres 12.2, genauer von Mitte Januar bis Ende Mai des Schuljahres 1996/97. Am Ende des Schuljahres erfolgte dann der Übergang zur Analytischen Geometrie. In dem Zeitraum wurde das Gebiet bis zum Testen von Hypothesen unter Benutzung binomialverteilter Zufallsgrößen erarbeitet anhand des eingeführten Lehrbuches von Althoff (1985) und z.T. mit Schmid u. Schweizer (1990). Im Halbjahr 13.2 wurde das Gebiet dann noch durch die Näherungsformel von Moivre-Laplace erweitert und abgerundet.

Die folgende Aufgabe wurde zusammen mit je einer Aufgabe zur Analysis und zur Analytischen Geometrie in der Abiturklausur 1998 in meinem Leistungskurs am Helmholtzgymnasium Bielefeld gestellt. Die gesamte Bearbeitungszeit betrug 4,25 Zeitstunden. Die Teile (a) bis (c) waren in entsprechenden Fragestellungen im Unterricht behandelt, allerdings war die Anbindung an einen konkreten Zeitungsartikel, aus dem die Daten herauszuziehen waren, eher ungewohnt, so auch die Frage (d), bei der die Schüler sich Gedanken machen mussten über die Voraussetzungen einer solchen Kontrolle und das dabei entstehende Ergebnis. Die Frage war in dieser Form nicht vorbereitet.

2. Aufgabenstellung

In der NW vom 21.11.1997 fand sich folgender Artikel über Schwarzfahrer mit der Überschrift "Kontrolleure kennen keine Verwandten":

Stochastik in der Schule **19** (1999), Nr. 3, 31-38.

Bielefeld. Stadtbahnhaltestelle Jahnplatz um 8 Uhr 30. Vier Männer zwischen Anfang zwanzig und Mitte fünfzig warten geduldig auf die Linie 1. Sie unterhalten sich zwanglos mit einem Polizisten und dessen Kollegin.
Die Bahn kommt, die Gruppe steigt ein, verteilt sich im gesamten Wagen, manche setzen sich, andere bleiben stehen. Eine Station lang passiert nichts. Doch dann nehmen die Vier Blickkontakt auf. Die Stimmung im Wagen wird merkwürdig gespannt, das Kleeblatt, begleitet von der Polizei, beginnt mit der Fahrscheinkontrolle.

60 Mark muß ein erwischter Schwarzfahrer auf den Tisch des Hauses legen. Wird der Fahrgast öfters erwischt, droht ihm eine Anzeige, denn ohne Ticket zu fahren ist kein Kavaliersdelikt. Die Stadtwerke gehen davon aus, daß rund vier Prozent der Fahrgäste Busse und Bahnen unberechtigterweise kostenlos benutzen.

Bei 32 Millionen Benutzern allein im letzten Jahr eine gewichtige Zahl.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

- Unter 27 Fahrgästen, die überprüft werden, befindet sich kein Schwarzfahrer.
- Unter 52 kontrollierten Personen sind mehr als 2 Schwarzfahrer.

(b) Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrolleur in der Bahn mindestens kontrollieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% wenigstens einen Schwarzfahrer zu erwischen?

(c) Weiter erfährt der Leser im Artikel:

Alle Fahrgäste, die ihr Ticket nicht direkt in der Hand haben, beginnen zu kramen. "Mir wird immer ganz heiß bei Kontrollen, obwohl ich bezahlt habe", gesteht eine Mitvierzigerin, die erst alle Taschen durchwühlen muß, ehe sie ihren Fahrschein findet.

Auf der Strecke zwischen Jahnplatz und Deciusstraße werden gleich fünf Schwarzfahrer erwischt. ...

Die verstärkten Kontrollen mit der Polizei lassen die "Erwischt-Statistik" nach oben schnellen. ...

... Es wurden 3800 Personen überprüft - 199 von ihnen wurde die Stadtbahnfahrt zum teuren Vergnügen.

Sollten die Stadtwerke aufgrund dieses Ergebnisses der Kontrolle von einer anderen Schwarzfahrerquote als 4% ausgehen? (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$)

(d) Begründe, dass ein Unterschied besteht, das Ergebnis "99 Personen wurden erwischt" zu erhalten:

(i) bei einer flächendeckenden Kontrolle an einem Morgen zwischen 6^{30} und 9^{30} Uhr oder

(ii) bei einer Kontrolle der Linie 1 an drei aufeinanderfolgenden Tagen zwischen 7 und 8.

3. Lösung

Die Zufallsgöße X beschreibe die Anzahl der Schwarzfahrer unter n Fahrgästen.

(a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrgast Schwarzfahrer ist, beträgt $p = 0{,}04$

- $p = 0{,}04$; Gegenwahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}96$. Die Wahrscheinlichkeit, unter 27 Fahrgästen keinen Schwarzfahrer anzutreffen, beträgt also $0{,}96^{27}.0{,}332$.
- X ist binomialverteilt mit $n = 52$; $p = 0{,}04$;

  $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 0{,}345$ (muss "zu Fuß" gerechnet werden). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als zwei Schwarzfahrer unter 52 Fahrgästen sind, beträgt ca. 34,5%.

(b) X kann als binomialverteilt mit $p = 0{,}04$ angesehen werden, da es sich um eine kleine Stichprobe aus einer großen Gesamtheit handelt. Gesucht wird n: Das führt zur Ungleichung $P(X > 1) > 0{,}75$. Diese wird zu $1 - P(X = 0) > 0{,}75$ umgeformt. Daraus ergibt sich dann:

$$1 - 0{,}96^n > 0{,}75 \;;\quad 0{,}25 > 0{,}96^n \;;\quad \frac{\ln\, 0{,}25}{\ln\, 0{,}96} < n \;;\quad 33{,}95 < n$$

Es sind also mindestens 34 Personen zu kontrollieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% einen Schwarzfahrer zu erwischen.

(c) Es soll getestet werden, ob die Hypothese H_0: $p = 0{,}04$ aufgrund des Versuchsergebnisses bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ verworfen werden kann. X ist binomialverteilt mit $n = 380$ und $p = 0{,}04$ bei wahrer Nullhypothese. Die Stadtwerke sind vorrangig daran interessiert zu wissen, ob gilt $p > 0{,}04$. Es handelt sich hier um einen einseitigen (rechtsseitigen) Test, da sehr große Werte von X gegen H_0: $p = 0{,}04$ sprechen. Da für $n =$ 3800 die Tabellenwerte der Binomialverteilung nicht vorliegen, ist zu prüfen, ob die Näherungsformel von Laplace angewendet werden kann; da

$$n\,p\,(1 - p) = 3800 \times 0{,}04 \times 0{,}96 = 145{,}92 > 9$$

gilt, kann die Formel verwendet werden. Erwartungswert: $3800 \times 0{,}04 = 152$; Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{145{,}92}$.

Der Ansatz $P(X \geq g) \leq 0{,}05$ führt zu $\Phi\left(\frac{g - 152{,}5}{\sqrt{145{,}92}}\right) \geq 0{,}95$. Daraus ergibt sich $g \geq 173$.

Der Ablehnungsbereich ist K = {173, ..., 3800}. Da 199 ε K ist, wird H_0: $p = 0{,}04$ abgelehnt. Man kann also bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ davon ausgehen, dass mehr als 4% der Benutzer der Bahnen und Busse in Bielefeld Schwarzfahrer sind.

(d) Hier nun einige mögliche Aspekte, wie sie bei der Bearbeitung dieses Teils erwartet wurden: Bei einer flächendeckenden Kontrolle an einem Morgen auf allen Linien kann man (m.E.) davon ausgehen, dass es sich um einen repräsentativen Querschnitt für den Morgenverkehr eines Werktages handelt. (Da in diesem Zeitraum 6^{30} Uhr bis 9^{30} Uhr vermutlich überdurchschnittlich viele Fahrgäste eine Dauerkarte haben, ist eine derartige Stichprobe wohl nicht repräsentativ für den Gesamtverkehr eines Tages.) Die Fangquote spiegelt dann in etwa die tatsächliche Schwarzfahrerquote des Morgenverkehrs wider. Im zweiten Fall trifft dies nicht zu. Auch hier handelt es sich um den Morgenverkehr, aber:

- Jeden Tag dürfte ungefähr dasselbe Publikum kontrolliert werden.
- Die Einschränkung auf nur eine Linie gewährleistet keinen repräsentativen Querschnitt der morgendlichen Fahrgäste insgesamt.
- Die "Fangquote"erschwert es in diesem Fall, aussagekräftige Rückschlüsse auf die Schwarzfahrerquote zu ziehen, denn
  - hartgesottene Schwarzfahrer werden mehrfach erwischt,
  - weniger hartgesottene Schwarzfahrer zahlen jetzt (wenigstens erst einmal für eine Weile),
  - ständige Kontrollen sprechen sich in einem "Frühwarnsystem" herum.

4. Ergebnisse der Bearbeitung (1)

Während es in den Aufgabenteilen (a) und (b) den Schülern nicht schwer fiel, die richtigen Rechnungen durchzuführen, übersahen doch etliche in Teil (c), dass es sinnvoller wäre, einen einseitigen Test durchzuführen; sie rechneten - meist kommentarlos - mit einem zweiseitigen Ansatz. In der Bewertung wurde vor allem die Kommentarlosigkeit der Auswahl besonders berücksichtigt. Insgesamt fiel auf, wie schwer sich etliche damit taten, die Ansätze und Ergebnisse zu begründen und zu erläutern. Das vollständige Formulieren eines begleitenden Textes in den Teilen (a) - (c) fiel schwächer aus als ich es nach der Vorklausur erwartet hätte.

Lediglich drei der Bearbeitungen zu Teil (d) zeigten in einem gewissen Rahmen Überlegungen, wie ich sie mir gewünscht hätte. Alle anderen blieben in den Ansätzen stecken und erkannten nicht oder kaum den wichtigsten kurz formulierbaren Punkt, nämlich die Untersuchung der Repräsentativität der beiden Situationen. In keiner der Antworten wurde der Schluss gezogen, dass 199 Schwarzfahrer im Fall (ii) bedeutet, dass der tatsächliche Anteil an Schwarzfahrern höher sein dürfte als im Fall (i). Viele Aussagen, die sich damit beschäftigen, zeigen eher den Tenor, dass dann ja die Zahl 199 nicht stimmen kann, sondern in Wirklichkeit kleiner sein müsste. In Aufgabenteil (d) gab es offensichtlich generell ein "Vorbeilesen" am Text. Für die Korrektur habe ich den Schluss gezogen, dass die Hoffnung auf derartige Antworten wohl doch etwas zu hoch gesteckt war für diesen Kurs und hier dann weniger Punkte angesetzt als ursprünglich vorgesehen und mich mit vageren Formulierungen zufriedengegeben.

5. Einige (unveränderte) Schülerantworten zu Teil (d)

1. Zunächst einmal wird zu unterschiedlichen Zeiten kontrolliert und auch die Tageszahl der Untersuchung ist unterschiedlich. Bei (ii) ist es anders wahrscheinlich, dass 199 Personen erwischt werden, da es sich auf drei Tage verteilt und nur Linie 1 untersucht wurde. Bei (i) wurde nur an einem Tag (auch morgens) kontrolliert und diese Kontrolle bezog sich auf alle Linien. Bei (i) bezieht sich das Ergebnis also auf alle drei Stadtbahnlinien, bei (ii) bezieht sich das Ergebnis nur auf die Linie 1 und es fahren ja nicht in jeder Bahn gleich viele Schwarzfahrer mit.

2. Natürlich besteht ein Unterschied, da man einen ganz unterschiedlichen Stichprobenraum zur Verfügung hat. Vielleicht fahren um 6^{30} - 9^{30} Uhr mehr Leute als zwischen 7 und 8 Uhr. Wenn zwischen 6^{30} Uhr und 9^{30} Uhr zum Beispiel 100 Personen mehr befördert werden, dann wäre das Ereignis "199 Personen wurden erwischt" im Fall (ii) besser, da die Wahrscheinlichkeit, dass man jemand beim Schwarzfahren erwischt, höher wäre.

3. Der Unterschied zwischen den Kontrollmethoden (i) und (ii) besteht hauptsächlich in der Größe des Stichprobenumfangs. Es ist anzunehmen, dass im Fall (i) mehr Personen kontrolliert werden als im Fall (ii), da der Zeitraum der Kontrolle größer ist und die Kontrolle flächendeckender durchgeführt wird. Zumal ist der Zeitraum (i) günstiger, da er die frühen Berufspendler erfasst. Wenn der Stichprobenumfang in den beiden Fällen unterschiedlich groß ist, führt das Ergebnis folglich zu einer unterschiedlichen Schwarzfahrerquote.

4. Es macht einen Unterschied, ob man eine flächendeckende Kontrolle durchführt, bei der man jeweils von einer Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}04$ dafür, dass eine Person schwarzfährt, ausgeht, oder ob man dieselbe Linie an drei aufeinanderfolgenden Tagen kontrolliert. Bei der letztgenannten Vorgehensweise wird sich am zweiten Tag und besonders am dritten Tag der Anteil der Schwarzfahrer in der Linie 1 verringern, da sie ja nun gewarnt sind bzw. sich eine Karte kaufen, um nicht eine Anzeige zu riskieren. Man kann bei den Kontrollen der Linie 1 am zweiten und dritten Tag also nicht mehr von einem 4%-igen Anteil an Schwarzfahrern ausgehen. Das Ereignis "199 Personen werden erwischt" ist hier also weniger wahrscheinlich als im ersten Fall.

5. Ergebnis "199 Personen wurden erwischt": Nun, es besteht ein Unterschied zwischen (i) und (ii), denn zunächst besteht in der Zeitspanne von 6^{30} h bis 9^{30} h ein unterschiedlich hohes Verkehrsaufkommen, d.h. zwischen 7 und 8 h sind die Bahnen voller, da das die Berufshauptver-

kehrszeit ist. Somit sind an drei aufeinanderfolgenden Tagen "mehr" Leute zwischen 7 und 8 Uhr unterwegs als einem Tag zwischen 6^{30} und 9^{30} h, also auch die Möglichkeit größer, Schwarzfahrer zu erwischen.

Jedoch: Die Leute, die regelmäßig zu ihrer Arbeitsstelle fahren, werden eine Monatskarte, Schülerkarte oder ein Umweltabo haben, während zu einem späteren Zeitpunkt vielleicht eher jemand "mal eben" ohne Fahrkarte in die Stadt fährt.

Ein anderer Vergleich müsste hier geschehen: Wenn flächendeckend zur selben Zeit im ganzen Stadtgebiet kontrolliert wird, ist die Wahrscheinlichkeit größer, mehr Personen zu erwischen, als bei mehrmaliger Kontrolle einer Linie, denn dort könnte ja auch jedesmal der gleiche erwischt werden bzw. nicht erwischt werden, da zu dieser Zeit ja meist die regelmäßigen Fahrer fahren. Des weiteren könnte man noch Unterschiede zwischen den einzelnen Stadtbahnlinien machen - usw. ...

Aber das reicht mir erstmal! Man kann die Ergebnisse der beiden Kontrollen meiner Meinung nach nicht vergleichen.

6. Zwischen 7 und 8 Uhr fahren in der Regel die Leute zur Arbeit bzw. Schüler in die Schule. Dies sind Leute, die fast täglich zur selben Zeit die Straßenbahn benutzen. Wenn nun an drei Tagen hintereinander in derselben Linie Kontrollen stattfinden, wird man nicht ein relevantes (gemeint ist hier wohl: repräsentatives) Ergebnis erhalten. Am ersten Tag würde man den Normalzustand haben, da die Kontrolle unerwartet kommt. Am zweiten Tag fahren wahrscheinlich einige Schwarzfahrer nicht mehr mit oder sie haben ein Ticket, da sie bereits gewarnt wurden. Nur einige neue Schwarzfahrer würden erwischt. Am dritten Tag würden die Stammfahrer mit der Kontrolle rechnen und ein Ticket haben, so dass die Quote sinken würde.

Wenn eine flächendeckende Kontrolle auf eine längere Distanz durchgeführt werden würde, würde die Schwarzfahrerquote sicher, da nun kein Benutzer damit rechnen würde. Jede Person würde nur einmal kontrolliert. Außerdem erhält man ein breiteres Spektrum der Fahrgäste. Zwischen 7 und 8 Uhr sind viele Schüler unterwegs. Wahrscheinlich ist dort die Quote höher als bei Einkäufern in der Stadt.

6. Ergebnisse der Bearbeitung (2)

Es waren für diese Aufgabe insgesamt 50 Punkte zu erreichen (wie auch bei den beiden anderen Aufgaben). Diese verteilten sich wie folgt auf die Teilaufgaben:

(a1) 4 P., (a2) 9 P., davon 4 P. für begleitenden Text; (b) 10 P., davon 4 für Texte; (c) 20 P., davon 10 für Erläuterungen und Antwort; (d) 7 P.

Deutlich wird im Vergleich zu den insgesamt erreichten Punkten (in Prozenten), die Einteilung der Schülergruppe in diejenigen, die sich offensichtlich im Bereich der Stochastik sicherer als in den anderen Gebieten fühlten, und in diejenigen, deren Draht zur Analysis und Analytischen Geometrie stärker war. Hier die erreichten Prozentsätze der Aufgaben und insgesamt sowie die erteilte Gesamtnote; A1 (Analysis), A2 (Analytische Geometrie), A3 (Stochastik):

A1	30	52	84	22	74	68	38	78	80	88	78	55	74	55	44	90
A2	64	35	57	38	24	76	57	99	72	85	88	26	50	42	46	64
A3	74	82	50	40	64	66	43	100	79	52	78	64	52	82	58	91
ges	56	56	64	33	54	70	45	92	77	75	81	48	59	60	49	82
Note	3 -	3 -	3	5	4+	3+	4 -	1	2	2	2+	4	3 -	3 -	4	2+

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Schüler im Durchschnitt bei der dritten Aufgabe deutlich besser als bei der Gesamtwertung abschnitten: Bei Aufgabe 1 wurden im Durchschnitt 63,1% der Punkte erreicht, bei Aufgabe 2 waren es 57,7%, und bei Aufgabe 3 betrug der Durchschnitt 67,2%; insgesamt wurden durchschnittlich 62,6% der Punkte erreicht.

Literatur:

Althoff, H. (1985): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.* Stuttgart: Metzler.

Schmid, A. u. Schweizer, W. (Hrsg.) (1990): LS Stochastik Leistungskurs. Stuttgart: Klett.

Barbara Ringel, Dieselstr. 5B, 33613 Bielefeld