Zufallsgeneratoren und Baumdiagramme -
Ein Beispiel, wie eine Rechnersimulation bei der wahrscheinlichkeits-theoretischen Lösung eines stochastischen Problems helfen kann

Guido Pinkernell, Münster

Zusammenfassung: Es wird ein Unterrichtskonzept beschrieben, in dem die Rechnersimulation eines stochastischen Problems vermittelnd zwischen seine Realsimulation und der wahrscheinlichkeitstheoretischen Lösung gestellt wird. Dadurch motiviert, eine zur Lösung hinreichend große Anzahl an Simulationen durchführen zu können, wird ein Computerprogramm erstellt, dessen Struktur ein entsprechendes Baumdiagramm in wesentlichen Teilen vorwegnimmt.

1. Einleitung

1.1 Rechnersimulation im Stochastikunterricht

Zur Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff werden bekannterweise zwei Ansätze beschrieben, und zwar die auf die Annahme von Gleichwahrscheinlichkeit beruhende Laplace-Definition und die Häufigkeitsdefinition. Die erstere erlaubt exakte Wahrscheinlichkeitsaussagen, so führen etwa Symmetrieüberlegungen am Spielwürfel dazu, daß dem Auftreten einer Augenzahl die Wahrscheinlichkeit 1/6 zugeschrieben wird. Die Häufigkeitsdefinition macht Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Grundlage empirischer Datenerhebung. Damit trägt sie der Tatsache Rechnung, daß, um im Beispiel zu bleiben, die relative Häufigkeit dieser Augenzahl in einer Versuchsreihe nur selten die von der Theorie 'geforderten' 1/6 beträgt. Wenn sie es ist, dann eben nur 'zufällig'. Eine übermäßige Betonung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatzes läßt wesentliche Erfahrungen mit stochastischen Phänomenen nicht zu. Erst durch eigentätige Auseinandersetzung durch Nachspielen und Simulation wird im umfassenden Maße der Charakter von Zufall deutlich (Wollring 1992).

Die Lösung mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden setzt voraus, daß die stochastische Struktur des Problems hinreichend gut erkannt und beschrieben wurde. Der wahrscheinlichkeitstheoretische Ansatz betont die Notwendigkeit zur Strukturierung eines Problems: Das Stück Wirklichkeit, das im Problem beschrieben wird, muß adäquat in die Sprache der Mathematik übersetzt werden, bevor die

Mathematik eine Lösung anbieten kann. Doch auch dort, wo Wirklichkeit simuliert wird, wird sie strukturiert. Das überrascht nicht, denn Simulieren impliziert eine gewisse Distanz zum Simulierten, die Beobachtung und Reflexion ermöglicht. Simulation kann also mehr sein als nur ein ‚blindes Drauflоswürfeln', sie kann also je nach Abstraktionsgrad einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Analyse recht nahe kommen. Insbesondere wenn es darum geht, ein stochastisches Problem mit Hilfe eines Computerprogrammes nachzustellen, werden Fragen nach seiner Struktur gestellt: Wann sind Fallunterscheidungen notwendig? An welcher Stelle muß ein Zufallsgenerator eingesetzt werden?

Im Unterricht kann man sich diesen Umstand dann zunutze machen, wenn realistische Probleme behandelt werden, die vom Schüler, von der Schülerin idealerweise eben nicht als Lehrbuchaufgabe wahrgenommen werden sollten. Ein dem Alltag entnommenes Problem will auch mit 'alltäglichen' Methoden angegangen werden, nämlich durch Nachmachen, Simulieren. Nach der Realsimulation folgt eine Rechnersimulation, und spätestens hier wird das Problem als stochastisches erkannt und muß soweit analysiert werden, daß es schließlich mit Hilfe eines Baumdiagrammes wahrscheinlichkeitstheoretisch 'exakt' gelöst werden kann. Wir wollen dies an einem konkreten Unterrichtskonzept verdeutlichen. Es basiert auf einer fünfstündigen Unterrichtseinheit, die der Autor in einem Grundkurs der Jahrgangsstufe 12 durchgeführt hat. Im Mittelpunkt steht das Konzept, der Unterrichtsgang ist als Schilderungsrahmen idealisiert, authentische Schülerzitate dienen zur Illustration.

1.2 Informationen zum Drei-Türen-Problem

Ein 'alltägliches' stochastisches Problem ist das Drei-Türen-Problem (DTP). Alltäglich im Sinne des Wortes insbesondere deshalb, weil es unter der Bezeichnung 'The Big Deal' bis vor kurzem sechsmal in der Woche im Rahmen einer bekannten deutschen TV-Spielshow öffentlich ausgestrahlt wurde. Es ist also in dieser Form für die Schülerinnen und Schüler Teil der Fernsehrealität und entsprechend ‚stochastisch unverdächtig'. Ihnen ist das DTP also wohlbekannt, nicht aber als Mathematikaufgabe, geschweige denn als stochastisches Problem.

> Angenommen, Sie nehmen an einer Spielshow teil, in der Sie die Wahl zwischen drei Türen haben. Hinter einer der Türen befindet sich ein Auto, hinter den anderen sind Nieten. Sie wählen eine Tür. Der Moderator, der von der Po-

sition des Autos weiß, öffnet eine andere Tür, hinter der sich eine Niete befindet. Er bietet Ihnen an zu wechseln. Wie würden Sie entscheiden: Bleiben Sie bei Ihrer ersten Wahl, oder wollen Sie wechseln?

Die amerikanische Journalistin Marylin vos Savant beantwortete vor einigen Jahren in ihrer Zeitung diese Frage mit: 'Ja, Sie sollten wechseln' und löste damit einen Sturm der Entrüstung aus, der sich bald danach auch im deutschen Blätterwald bemerkbar machte (von Randow 1994). Mathematische Laien wie Akademiker amüsierten sich herzlich oder protestierten heftigst. Ein Leser vermutete gar, daß der Grund für die Antwort der vos Savant wohl darin liegen müsse, daß Frauen ein anderes Mathematikverständnis hätten als Männer.

A	K	M	**W**	**NW**
1	1	2	**V**	**G**
1	1	3	**V**	**G**
1	2	3	**G**	**V**
1	3	2	**G**	**V**
2	1	3	**G**	**V**
2	2	1	**V**	**G**
2	2	3	**V**	**G**
2	3	1	**G**	**V**
3	1	2	**G**	**V**
3	2	1	**G**	**V**
3	3	1	**V**	**G**
3	3	2	**V**	**G**

Abb. 1

Daß Frau vos Savant unrecht habe, darin waren sich die meisten Leser ihrer Zeitung einig und wußten ihre Meinung auch überzeugend zu begründen. Ein Leser stellte beispielsweise eine Liste aller der möglichen Türkombinationen zusammen, die sich in einem Spiel ergeben können, und zwar aus der Position des Autos (A), der ersten Wahl des Kandidaten (K) und der vom Moderator geöffneten Tür (M) (Abb. 1). Hieraus folgerte er nun: 'Wechseln (W) wie Nichtwechseln (NW) führen jeweils in sechs von zwölf Fällen zum Gewinn (G). Daher besteht jeweils eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/2 .' Hat er recht? Man bedenke, daß der Leser einer Frau widersprach, die den damals höchsten bekannten Intelligenzquotienten hatte.

Wir wollen den Konflikt an dieser Stelle noch nicht auflösen. Das DTP ist vielfach diskutiert und für den Unterricht aufbereitet worden (vgl. z. B. Engel und Venetoulias 1991, Borovcnik 1991, Klemisch 1993, Wollring 1992). Unser Schwerpunkt ist nicht das stochastische Problem DTP, sondern ein Konzept dazu, wie man sich im schulischen Rahmen unter Zuhilfenahme eines Rechners mit diesem Problem auseinandersetzen kann. Es soll insbesondere demonstrieren, wie der Rechner in beiden Phasen des Auseinandersetzungsprozesses, der empirisch - statistischen sowie der theoretischen, die Suche nach der Lösung unterstützt.

2. Unterrichtskonzept

2.1 Informationen zum Unterrichtszusammenhang

Der im folgenden geschilderte Unterrichtsgang beruht, wie eingangs erwähnt, auf Erfahrungen in einem gymnasialen Grundkurs der Jahrgangsstufe 12. Die Lerngruppe hatte sich zuvor mit grundlegenden Begriffen der Stochastik beschäftigt, insbesondere dem des Zufallsexperiments, dem Laplace - Wahrscheinlichkeitsbegriff, dem empirischen Gesetz der Großen Zahlen und dem Baumdiagramm als wahrscheinlichkeitstheoretische Methode. Der Rechner kam regelmäßig zum Einsatz, insbesondere die Programmierung des Zufallsgenerators. Die Auseinandersetzung mit dem DTP muß man somit als abschließende Unterrichtsreihe verstehen, in der noch einmal alle gelernten Begriffe und Methoden zur Anwendung kommen konnten.

2.2 Unterrichtsgang

Es sei darauf hingewiesen, daß die Lerngruppe zu Beginn der Reihe über keinerlei Vorabinformationen zum DTP verfügte, insbesondere nicht über den eingangs angeführten Lösungsversuch des Lesers (Abb. 1).

a) Erstbegegnung

In der ersten Stunde der Unterrichtsreihe sehen die Schülerinnen und Schüler das DTP in Gestalt der Videoaufzeichnung des ‚Big Deal': Man sieht die Kandidatin und den Moderator vor den drei verhangenen Türen. Der Moderator weist noch einmal ausdrücklich darauf hin, daß er anders als sonst weder Hinweise geben noch sonstwie versuchen werde, die Kandidatin zu beeinflussen, kurz: die Kandidatin sei in ihren Entscheidungen völlig unabhängig. Diese wählt nun eine Tür, der Moderator öffnet eine andere, hinter der daraufhin ein Nebengewinn zum Vorschein kommt. (Es können, anders als im DTP, an dieser Stelle entweder eine Niete oder ein Nebengewinn sichtbar werden. Da dieser Nebengewinn aufgrund seines relativ zum Auto niedrigen Wertes so gut wie nie gewählt wird, kann man herausstellen, daß der Gewinn der Autos oberstes Ziel ist, womit die Analogie zum DTP wieder sichtbar wird.) Nach einem kurzen Werbespot über den Nebengewinn stellt der Moderator die entscheidende Frage: 'Wollen Sie wechseln oder nicht?' Hier bricht die Videoaufzeichnung ab.

Im anschließenden Unterrichtsgespräch wird deutlich, daß alle Schülerinnen und Schüler die Sendung und insbesondere den 'Big Deal' kennen. Die Kontroverse um das DTP dagegen ist ihnen nicht bekannt, geschweige denn die korrekte Lösung. Entsprechend einhellig ist die Meinung: 'Ist doch egal, ob man wechseln soll oder nicht.' Der Schülerin A aber kommen erste Bedenken, die aber prompt von ihrem Mitschüler B beiseite gewischt werden:

A: Wenn man anfangs eine Tür wählt, hat man eine Chance von 1/3. Nachdem der Moderator eine Tür geöffnet hat, soll sich ja die Chance auf 1/2 erhöhen, wenn man wechselt. Wenn man bleibt, bleibt auch die Chance von 1/3 , der Moderator bräuchte dann ja auch gar nicht mehr öffnen.

B: Es besteht eine Chance von 1/2 , egal ob man wechselt oder nicht!

A (nach einer kurzen Pause): Ich glaube, B klingt logischer ...

Die Diskussion endet in einem klassischen kognitiven Konflikt: Wie nämlich kann es sein, daß die Gewinnchance gleichermaßen plausibel mit 1/3 oder 1/2 begründet werden kann? Der erste Fall muß sich doch einstellen, wenn der Kandidat stillschweigend auf eine neue Entscheidung verzichtet, noch bevor der Moderator eine Tür öffnet. Für ihn ist das Spiel ja zu Ende, nachdem er eine der drei verhangenen Türen ausgewählt hat. Daß nun der Moderator doch noch eine der verbliebenen Türen öffnet, dürfte an der anfänglichen Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/3 eigentlich nichts mehr ändern. Der zweite Fall aber soll doch gelten, wenn der Kandidat sich auf das Angebot einer zweiten Entscheidung einlassen möchte. Er entspricht dem Argument, daß in der zweiten Entscheidung eine von zwei verhangenen Türen ausgewählt werden soll. Und einem solchen Fall gilt doch eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/2 , oder?

b) Realsimulation

Wie soll man also diesen Konflikt entscheiden? Spielen wir das Problem zunächst einfach möglichst realistisch nach. Vielleicht finden wir ja einen neuen Lösungsansatz, vielleicht sammeln wir auch schon soviel empirische Daten, daß die Statistik uns zu einer Lösung verhilft.

Die Schülerinnen und Schüler führen also in Gruppen Realsimulationen durch, jeweils etwa 15 Durchgänge. Die Spielverläufe werden in einer Urliste protokolliert, die sich am realen Spielverlauf orientiert (siehe Abb. 2). Die anschließende Auswertung zeigt: Eine Gruppe 'wechselt' konsequent und gewinnt in etwa 50% der Fälle. Sie könnte für die Option 'Egal' plädieren. Eine andere Gruppe gewinnt bis auf einmal immer, wenn sie nicht wechselt. Ist vielleicht sogar die Option 'Nichtwechsel' die erfolgversprechendste? Faßt man die Ergebnisse aller Gruppen zusammen, so führt 'Wechseln' in etwa 58% der Fälle zum Gewinn. Die Gewinnausbeute für die Option 'Wechseln' liegt also zwischen den beiden erwarteten Werten 1/2 und 2/3 und läßt daher eine Entscheidung über die tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit nicht zu.

Nr	A	K	M	**W**	**NW**
1	3	1	2	**G**	**V**
2	1	2	3	**G**	**V**
3	1	1	2	**V**	**G**
4	2	3	1	**G**	**V**
5	2	2	3	**V**	**G**
6	1	1	3	**V**	**G**
7	3	2	1	**G**	**V**
8	3	3	2	**V**	**G**
9					
10					
11					
...					

Abb. 2

Die Realsimulation hat also den Meinungskonflikt nicht lösen können. Während des Spielens machte ein Schüler aber eine Beobachtung:

> Wenn ich jetzt Tür 1 wähle, und hinter Tür 2 ist das Auto, dann kann der Moderator nur noch Tür 3 aufmachen. Wenn nun das Auto ebenfalls hinter Tür 1 ist, dann hat er die Auswahl zwischen Tür 2 und 3.

Der Moderator ist offenbar in seiner Entscheidung nicht so frei, wie es der Kandidat vermuten könnte. Genauer: Er hat nur dann die vermeintlich freie Wahl zwischen den beiden verbliebenen Türen, wenn die erste Wahl des Kandidaten auf die Tür mit dem Auto gefallen ist. Damit hat die Lerngruppe einen ersten Einblick in die stochastische Struktur, weiß aber diese Beobachtung zu diesem Zeitpunkt noch nicht weiter auszunutzen. Es erscheint vielversprechender, die Anzahl der Simulationen mittels des Rechners zu erhöhen.

c) Rechnersimulation

Man kann im allgemeinen nicht erwarten, daß die Schülerinnen und Schüler eines Grundkurses ein funktionstüchtiges Simulationsprogramm für das DTP erstellen. An der Konzeption sollten sie aber beteiligt werden, und zwar nicht nur aus Gründen der Transparenz. Wir werden sehen, wie die in diesem Zusammenhang gemachten Überlegungen später in die wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung einfließen werden. Zunächst aber beschäftigen sie sich mit dem folgendem Problem:

> Wenn ich ein Programm schreiben wollte, welche Schritte des DTP lassen sich automatisieren? --- Genauer: An welchen Stellen muß der Zufallsgenerator eingesetzt werden?

Eine erste Antwort könnte folgendermaßen aussehen:

1. Das Auto steht hinter einer der drei Türen: `A=random(1,2,3)`
2. Der Kandidat wählt eine Tür: `K=random(1,2,3)`
3. Der Moderator öffnet eine Tür: `M=?`

Welche Zahlen hat der Zufallsgenerator zur Simulation der Moderatorenentscheidung zu produzieren? Ein Schüler hatte ja schon angemerkt, daß es nicht in jedem Fall zwei Türnummern sein können. Seine Beobachtung, in Abb. 3 verallgemeinert zusammengefaßt, hilft weiter. Der Zufallsgenerator wird sinnvollerweise nur in solchen Fällen eingesetzt, wo der Moderator tatsächlich zwei Türen öffnen kann. Das sind solche, in denen der Kandidat bei der ersten Wahl auf die Tür mit dem Auto gestoßen war. Der Generator wählt dann zufällig eine der verbleibenden Türen aus. In den übrigen Fällen ist es möglich, die auszuwählende Türnummer zu berechnen.

An dieser Stelle wird nun der eingangs erwähnte Aspekt des Rechnereinsatzes erstmals deutlich. Ebenso wie die Abb. 1 listet die Abb. 3 alle im Spiel möglichen Türkombinationen. Anders als jene berücksichtigt diese aber die Abhängigkeit M's von A und K. Wichtig für uns ist nun die graphische Nähe zu einem Baumdiagramm. Zwar mag dies nicht jedem Beteiligten am Lösungsprozeß bewußt sein, zumal in dieser Phase die Simulation die vordergründige Motivation ist. Dennoch ist dies Material, was in der Phase der wahrscheinlichkeitstheoretischen Lösungsfindung wieder Verwendung finden kann.

A	K	M
1	1	2,3
1	2	3
1	3	1
2	1	3
2	2	1,3
2	3	1
3	1	2
3	2	1
3	3	1,2

Abb. 3

```
' Position des Autos und erste Kandidatenwahl ------
         A% = INT(RND * 3) + 1
         K% = INT(RND * 3) + 1
' Moderatorenwahl ----------------------------------
         IF (A% = 1 AND K% = 1) THEN M% = INT(RND*2)+2
         IF (A% = 1 AND K% = 2) THEN M% = 3
         IF (A% = 1 AND K% = 3) THEN M% = 2

         IF (A% = 2 AND K% = 1) THEN M% = 3
         IF (A% = 2 AND K% = 2) THEN M% = (INT(RND*2)*2)+1
         IF (A% = 2 AND K% = 3) THEN M% = 1

         IF (A% = 3 AND K% = 1) THEN M% = 2
         IF (A% = 3 AND K% = 2) THEN M% = 1
         IF (A% = 3 AND K% = 3) THEN M% = INT(RND*2)+1
```

Abb. 4

Dem im Unterricht erstellten Konzept folgend programmiert nun der Lehrer ein Simulationsprogramm des DTP (vgl. Abb. 4). Die Lerngruppe analysiert die Zeilen, in denen ihre Konzeption Niederschlag gefunden hat und führt die Simulation durch. Nach etwa 1500 Durchgängen 'Wechseln' liegt die Gewinnausbeute deutlich in der Nähe von 2/3 , womit die Vermutung der Schülerin A (siehe Abschnitt 2.2.a) bestätigt wird. Die Lerngruppe hat damit eine erste experimentelle Lösung. Eine Erklärung aber, warum das so ist, hat sie noch nicht.

d) Baumdiagramm

Zur Neumotivation nach Abschluß der empirischen Phase berichtet der Lehrer über das amerikanische Vorbild des 'Big Deals' und die öffentliche Kontroverse, die um Marylin vos Savant und dem Drei-Türen-Problem geführt worden war. Insbesondere legt er das Gegenargument des Lesers vor, das auf den ersten Blick sehr überzeugend wirkt (vgl. Abb. 1). Trotzdem sprechen unsere empirischen Befunde dagegen. Worin liegt also der Fehler in Gegenargument des Lesers?

Die Schülerinnen und Schüler haben in Arbeitsgruppen Gelegenheit, sich mit diesem Problem zu beschäftigen. Eine Gruppe ist auf dem richtigen Weg:

A: Man könnte die Türkombinationen 112 und 113 zusammenfassen [...]

B: Zusammenfassen kann man alle die Fälle, wo du als Kandidat schon die richtige Tür erwischt hast [...]

C: Insgesamt 9 Möglichkeiten - 6 positiv. Gut. Der Fehler des Lesers ist offenbar, die Fälle 112, 113 usw. zu unterscheiden. Man muß sie zusammenfassen. Aber warum darf man das?

Warum darf man also zusammenfassen? Ziehen wir zur Begründung die Abb. 3 wieder heran. Dort sind anläßlich der Frage nach der Randomisierung dieselben Türkombinationen zusammengefaßt worden, von denen hier die Schüler sprechen. 'Zusammengefaßt' hieß aber dort, daß es ein einziger Zufallsgenerator ist, der die beiden letzten Türnummern M produziert. Ein einzelner Zufallsgenerator ist es auch, der die drei Türnummern K = 1,2,3 produziert, ebenso für die Türnummern A = 1,2,3. Diese Struktur wird naheliegenderweise durch ein Diagramm illustriert, in dem eine Verzweigung den notwendigen Einsatz eines Zufallsgenerators signalisiert (Abb. 5).

Es ist das Baumdiagramm, das den Schülern als methodisches Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt ist. Sie können nun ihre Kenntnisse über die Pfadmultiplikation und Additionsregel anwenden und stellen fest: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es zu einer für das Wechseln günstigen Türkombination kommt, beträgt 2/3. Das bestätigt nicht nur die empirische Lösung des DTP, sondern beantwortet auch gleich die Frage nach dem Fehler in der Leserargumentation. Dieser hatte stillschweigend vorausgesetzt, alle Türkombinationen träten mit gleicher

Wahrscheinlichkeit auf.

3. Schlußbemerkungen

Soweit die Beschreibung eines Unterrichtskonzepts, das die Rechnersimulation des Drei-Türen-Problems zwischen die Realsimulation und seine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung stellt. Dieser Aspekt der Rechnersimulation im Rahmen eines Problemlöseprozesses ist nicht neu. Biehler (1991) beschreibt dies als 'dual nature' einer Rechnersimulation, die sie aufgrund ihrer interaktiven Nutzungsmöglichkeiten einerseits als physisches Modell des Simulierten erscheinen läßt, andererseits als symbolisches Modell, da sie zunächst eine Übersetzung der realen Situation in die formale Programmiersprache erfordert.

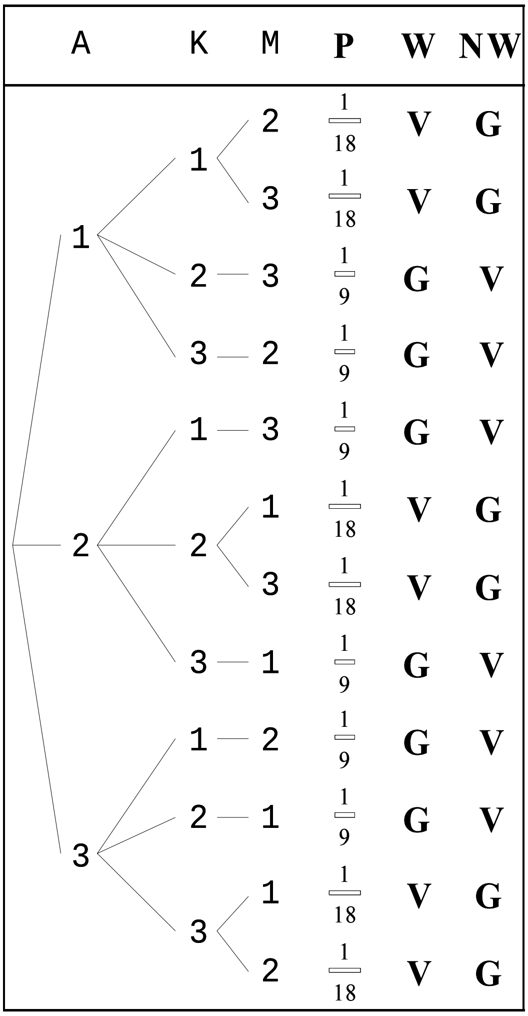

Abb. 5

Auf einem anonymen Fragebogen antwortete ein Schüler auf die Frage, wie er den Einsatz des Computers im Rahmen der Unterrichtsreihe bewerte, er sei deswegen sinnvoll gewesen, da er zur 'Veranschaulichung' des Drei-Türen-Problems beitrug. Nun ist diese Äußerung interpretierbar und hätte im Gespräch weiter erläutert werden müssen. Vielleicht aber meint dieser Ausdruck tatsächlich, daß die Arbeit an einer Rechnersimulation tatsächlich, wie mit diesem Konzept intendiert, einen tieferen Einblick in die stochastische Struktur dieses Problem ermöglicht.

Literatur

Biehler, R. (1991): Computers in Probability Education. - In: R. Kapadia; M. Borovcnik (Hg.), *Chance Encounters: Probability in Education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 169-211.

Borovcnik, M. (1991): Problemecke: Eigenartiges Denken. - In: *Stochastik in der Schule* 11, 46-51.

Engel, A.; Venetoulias, A. (1991): Monty Hall´s Probability Puzzle. - In: *Chance* 4, 6-9.

Klemisch, I.(1993): Ein Einstieg über das Drei-Türen-Problem. - In: *Stoch. Schule* 13, 9-14.

Pinkernell, G. (1997): Aus der TV-Gameshow in den Stochastikunterricht - Das Drei-Türen-Problem als Unterrichtsgegenstand. - In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 411-414.

von Randow, G.(1994): Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten. - Reinbeck: Rowohlt

Wollring, B. (1992): Ein Beispiel zur Konzeption von Simulationen bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. - In: *Stochastik in der Schule* 12, S. 2-25

Guido Pinkernell
Westfälische Wilhelms – Universität, Institut für Didaktik der Mathematik
Einsteinstraße 62, 48149 Münster Email: guido.pinkernell@uni-muenster.de