Unabhängigkeit Unterrichten

Henrik Dahl, Kristiansand; Übersetzung: *Manfred Borovcnik*, Klagenfurt

Zusammenfassung: Beispiele sollen aufzeigen, wie Unabhängigkeit in statistische Fragestellungen hineinkommt. Es wird geprüft, wie Unabhängigkeit in Lehrbüchern abgedeckt wird.

1. Einleitung

Das Konzept der Unabhängigkeit hat im gesamten Verlauf der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine besondere Rolle inne. Kolmogorov (1950) stellt in seinem berühmten Buch fest, daß es die Unabhängigkeit ist, die bewirkt, daß Wahrscheinlichkeit von der Maßtheorie verschieden ist.

> "Historisch stellt die Unabhängigkeit von Experimenten und Zufallsvariablen genau jenes mathematische Konzept dar, das der Wahrscheinlichkeitstheorie ihren eigenen Stempel aufprägt."

Obwohl Kolmogorov nicht erörtert, wie man Unabhängigkeit in der Praxis sicher stellt, formuliert er das Problem:

> "Folglich ist eines der wichtigsten Probleme in der Philosophie der Naturwissenschaften - zusätzlich zum wohlbekannten hinsichtlich des Wesens des Konzepts der Wahrscheinlichkeit - die Voraussetzungen zu präzisieren, welche es ermöglichen würden, Ereignisse als unabhängig zu betrachten. Diese Frage jedoch geht über das Ziel dieses Buches weit hinaus."

Von Mises (1957) versucht, statistische Unabhängigkeit mittels seiner Kollektive zu erfassen. Er findet die übliche Definition von Unabhängigkeit von Ereignissen als unzufriedenstellend, aber er gibt sich mit seiner Kollektiv-Version dessen, was heute als "Produktmodell" bekannt ist, zufrieden.

Kac (1959) kommentiert zur Unabhängigkeit wie folgt:

> "Dieser Begriff stammt aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und wurde lange Zeit mit einer Vagheit behandelt, welche Argwohn verbreitete, ob es sich dabei guten Gewissens noch um einen mathematischen Begriff handeln könnte."

Kac zeigt, daß Unabhängigkeit als ein mathematisches Objekt zumindest in der

Reinen Mathematik existiert. Die Implementierung von Unabhängigkeit in praktischen Situationen wird von ihm nicht behandelt.

2. Probleme im Unterrichten von Unabhängigkeit

Angesichts dessen , was weiter oben gesagt wurde, ist es nicht verwunderlich, daß Studenten Schwierigkeiten haben, die Bedeutung von Unabhängigkeit zu verstehen. Dieses Thema zu unterrichten ist daher eine Herausforderung. Studenten mit einigem mathematischen Hintergrund, namentlich Lineare Algebra, werden davon profitieren, Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Orthogonalität zu verbinden. Wenn wir unabhängige Zufallsvariablen als orthogonale Vektoren betrachten, bedeutet ihre Unabhängigkeit, daß die Vektoren aufeinander keine Zufälligkeit projizieren. Diese Beziehung zwischen Unabhängigkeit und Orthogonalität unterstreicht den Charakter von unabhängigen Experimenten.

In einführenden Kursen in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden Studenten mit der Annahme konfrontiert, daß die Daten als Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen betrachtet werden. Ich werde das Problem, den Sinn des Begriffes Unabhängigkeit Studierenden klar zu machen, in einer Art anpacken, die ihnen den Unterschied sehen läßt zwischen Situationen, in denen diese Annahme vernünftig oder eben nicht vernünftig ist. Die formale Definition von Unabhängigkeit von Zufallsvariablen X_1, X_2, ..., X_n sagt wenig aus, was für einen Anfänger nützlich sein könnte, weder ob die Daten wirklich diese Struktur haben oder nicht:

$$\mathrm{P}\left(X_1{=}x_1 \cap X_2{=}x_2 \cap \ldots \cap X_n{=}x_n\right) \;=\; \mathrm{P}(X_1{=}x_1)\,\mathrm{P}(X_2{=}x_2)\ldots\mathrm{P}(X_n{=}x_n)$$

$$\text{für alle möglichen } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Viele Studenten werden solch formale Definitionen nicht verstehen. Sie könnten jedoch später in Positionen gelangen, wo sie statistische Untersuchungen einbeziehen müssen, in denen die Annahme der Unabhängigkeit verletzt sein mag. Ich bevorzuge Beispiele, um solche Leute zu trainieren, den Unterschied zwischen richtiger und falscher Anwendung der Annahme der Unabhängigkeit zu erkennen.

3. Beispiele von Unabhängigkeit und Abhängigkeit

Wenn wir Daten nützen, um daraus Schlüsse zu ziehen, so brauchen wir eine

Absicherung, daß diese Daten wirklich neue, "frische" Information sind und nicht von Daten "verschmutzt", die wir bereits gesammelt haben. Wenn dies nicht der Fall ist, so repräsentieren neue Daten keine neue Information.

Beispiel 1

Schüler sollen einen Stein mehrere Male mit einer Federwaage abwägen. Während des Vorgangs sollen sie herausfinden, wie zuverlässig die Federwaage wägen läßt. Die Schüler führen nur eine Wägung des Steines durch. Sei dies das Gewicht X [in Gramm]. Um dem Lehrer vorzugaukeln, daß sie die Aufgabenstellung erfüllt hätten, behaupteten sie, daß sie auch folgende Gewichte abgelesen hätten: X+1, X+2, ..., X+20, X-1, X-2, ..., X-20. Um den Lehrer zu täuschen, schreiben sie die 41 Werte in wahlloser Reihenfolge. Welches statistische Verfahren auch immer benützt wird, um die Zuverlässigkeit der Wägung zu untersuchen, die Daten sind dazu einfach nutzlos. Sie sagen überhaupt nichts darüber aus.

Das Beispiel zeigt, daß wir eine gewisse Art von Annahme wie die der Unabhängigkeit treffen müssen. Ohne solche Beschränkungen über die Verunreinigung [Beeinflussung] der Daten untereinander können sie nicht für irgendwelche Schlüsse benützt werden. Eine der grundlegenden Ideen der Statistik ist, daß wir zuverlässigere Schlüsse erhalten, wenn wir mehr Daten verwenden. Das "Wurzel n"-Gesetz besagt: Um die Präzision einer Untersuchung um einen gewissen Faktor zu steigern, bedarf es einer Erhöhung der Zahl der Daten um das Quadrat dieses Faktors. Das Gesetz setzt aber Unabhängigkeit der Beobachtungen voraus.

Beispiel 2

Eine Umfrage soll Daten über vier Abteilungen einer Firma erheben. Wenn die Leute, welche die Formulare ausfüllen, miteinander sprechen, bevor sie den Fragebogen abgeben, werden sich Abhängigkeiten einschleichen. Die Daten werden dann nicht vier Teile von Information enthalten sondern vielleicht nur einen.

Beispiel 3

Es wird der Niederschlag in Kristiansand vom 12. bis zum 20.2.1992 gemessen. Diese Daten können nicht als unabhängig betrachtet werden, denn regnerisches oder trockenes Wetter hat die Tendenz, über mehrere Tage anzuhalten.

Beispiel 4

Es wird der Niederschlag in Kristiansand am 12.2.1992, 12.2.1993, 12.2.1994 und am 12.2.1995 gemessen. Diese Daten können vernünftigerweise als unabhängig betrachtet werden, denn die Abhängigkeit des Wetters wird nicht sehr groß sein für einzelne Tage, die ein Jahr Abstand haben.

Beispiel 5

Von einem Polizeioffizier, der jedes Jahr eine Lotterie veranstaltete, geht folgende Mär: Jedes Jahr wurden Lose mit den Nummern 0 bis 999 verkauft, nur ein Los gewann den Preis. Jemand mit statistischen Kenntnissen sah die Auflistung der Gewinnzahlen einiger Jahre und erkannte eine bemerkenswert gleichmäßige Verteilung der Intervalle 0-99, 100-199, ..., 900-999. Der Offizier, dazu befragt, erklärte, daß er veranlaßt hätte, die Intervalle gleichmäßig zu verteilen, um sicher zu stellen, daß die Ziehung zufällig wäre! Der wohlmeinende Polizeioffizier hatte in der Hoffnung, Zufälligkeit zu erhalten, Abhängigkeiten eingeführt.

Beispiel 6

Benutzer von Statistik unterstellen häufig Unabhängigkeit, wenn dies gar nicht realistisch ist. Das folgende Beispiel ist aus dem New Scientist (September 1991). Der Airbus A-320 hat fünf Flugcomputer, die parallel arbeiten. Wenn der eine ausfällt, übernimmt der nächste seine Aufgaben, wenn dieser ausfällt, so der nächste in Reihe usw. Es wurde behauptet, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit jedes der Computer 0,00001 pro Flugstunde beträgt. Daraus schloß man, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls aller Computer an Bord $0{,}00001^5$ pro Flugstunde beträgt. Offensichtlich hat jemand sich gedacht, es wäre angemessen, zu unterstellen, daß der Ausfall der fünf Computer unabhängig voneinander ist. Ein Zusammenstoß zweier A-320-Flugzeuge, wahrscheinlich verursacht durch Computerfehler, läßt aber ernste Zweifel hinsichtlich der Unabhängigkeit des Ausfalls der verschiedenen Bordcomputer aufkommen.

Beispiel 7

Im Verlauf meiner beruflichen Laufbahn wurde ich Zeuge verschiedenster Mißbräuche von statistischen Methoden; das folgende ist ein trauriges Beispiel dafür. Versuchspersonen machen einen psychologischen Test durch, der aus mehreren

Fragen besteht, die sie zu beantworten haben. Der Test wurde 20 Mal wiederholt. Die Daten wurden als Folge von 0 und 1 gesammelt, 1 zeigt dabei eine richtige, 0 eine falsche Antwort an. Alle Beobachtungen wurden als unabhängig angenommen. Ich war neugierig, ob die Versuchspersonen, denen dieselben Fragen immer wieder gestellt wurden, dazu lernten und so sich verbesserten. Die Untersuchung der Daten zeigte, daß die Häufigkeit von richtigen Antworten ständig anstieg im Laufe der Wiederholungen. Als ich dann daraus schloß, daß dies ganz klar zeigte, daß dies die Annahme der "Unabhängigkeit der Wiederholungen desselben Experiments" verletzte, wurde mir entgegnet, daß die Forderung "unabhängige Wiederholungen desselben Experiments" in der psychologischen Forschung nie erfüllt sein könnte! Rayner (1993) diskutiert Zwei-Stichproben-t-Tests und die Problematik von "verbundenen" und "unverbundenen" Stichproben.

Unabhängigkeit hat die Funktion, Verschmutzung (Beeinflussung) der Information zwischen verschiedenen Beobachtungen auszuschließen. Das bedeutet nicht, daß Beobachtungen, wie sie aufgezeichnet werden, nicht schön langsam (mit mehr Daten) ein klareres Bild des Phänomens geben, das wir untersuchen!

4. Unabhängigkeit Erkennen

Wir haben selten ausreichend Information, um einen formalen Test auf Unabhängigkeit anzuwenden. Ohne die Kenntnis einer spezifischen Alternative [über die Art der Abhängigkeit] ist es nicht offensichtlich, welchen Test wir benutzen sollten, um die Unabhängigkeit zu überprüfen. Der Chi-Quadrat-Test hat eine kleine Trennschärfe bei kleinen Datenmengen und kann eine zu große Trennschärfe für große Datenmengen haben. Der Durbin-Watson-Test auf Unabhängigkeit zeigt nur Abhängigkeiten, welche mit der Reihenfolge der Beobachtungen zusammen hängen. Die wahre Bedeutung von Unabhängigkeit ist nicht so leicht zu verstehen wie andere Begriffe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Um die praktische Bedeutung der Unabhängigkeit zu zeigen, habe ich Anschauungsmaterial entwickelt, das aus drei Ketten von Glasperlen in den Farben gelb und blau besteht. Die Zahl der Glasperlen in jeder Kette ist nahezu 200. In einer der Ketten sind die Perlen unabhängig aufgefädelt, in den anderen sind die Farben aufeinanderfolgender Perlen abhängig voneinander.

Die Studenten erhalten die Aufgabe, herauszukriegen, in welcher der Ketten die

Farbe der Perlen unabhängig voneinander sind. Sie erkennen bald, daß die Ketten sich hinsichtlich der Mischung der Farben unterscheiden. In einer sind die Farben sehr gut gemischt, wobei es wenige lange Abschnitte gleicher Farbe gibt. In einer anderen sind die Farben nicht so gut gemischt, wobei es eine Menge langer Abschnitte gleicher Farbe gibt. Die dritte Kette scheint ein Mittelmaß an Mischung aufzuweisen.

Wenige Studenten glauben, daß die Kette mit den langen Abschnitten gleicher Farbe der Unabhängigkeit entspricht. Da liegen sie richtig. Tatsächlich hat der Generator, der für diese Kette benutzt wurde, eine Reihenkorrelation von +0,7. Es ist jedoch nicht so leicht, aus den beiden anderen die richtige herauszubekommen. Dies ist interessant, denn die eine, wo die Farben sehr gut gemischt sind, wurde von einem Mechanismus mit einer Reihenkorrelation von -0,7 erzeugt. Es scheint, einige Leute denken, daß Unabhängigkeit eine Kraft einschließt, die lange Runs vermeidet. Oder, andersrum, die Leute erwarten, daß der Zufall Mitleid hat mit jenen, die schon mehrere Spiele verloren haben.

5. Unabhängigkeit in Lehrbüchern

Ich bin sehr besorgt über die Art, wie wenig Statistiker die Wichtigkeit von Unabhängigkeit unterstreichen. Um solch einen Eindruck zu erhärten oder zu widerlegen, führte ich eine Untersuchung durch, wie Unabhängigkeit in einigen Lehrbüchern zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik abgedeckt wird. Die Erhebung sollte nicht allzu ernst genommen werden, ich mache keine Ansprüche auf Repräsentativität geltend. [Aber] man bekommt den Eindruck, daß Unabhängigkeit eine sehr geringe Rolle spielt:

Zahl der Seiten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	26
Zahl der Bücher	3	11	4	3	2	4	3	2	1	0	2	...	1

Das ist ein Fall, in welchen der Ausreißer sehr interessant ist! Es ist das Buch von Hodges und Lehman (1970), welches ein ganzes Kapitel enthält mit einer Diskussion, wann Modelle, die Unabhängigkeit brauchen, realistisch sind.

6. Tiefergehende Diskussionen über Unabhängigkeit

Während der Suche nach Unabhängigkeit in Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik kam ich auch auf andere Bücher, die sich mit dem Thema befassen. Insbesondere die zwei Bücher von de Finetti (1974, 1975) haben eine Menge dazu zu sagen. De Finetti diskutiert zumindest fünf verschiedene Konzepte, die relevant für Abhängigkeit und Unabhängigkeit sind:

Logische Unabhängigkeit / Abhängigkeit
Lineare Unabhängigkeit / Abhängigkeit
Nichtlineare Unabhängigkeit / Abhängigkeit
Stochastische Unabhängigkeit / Abhängigkeit
Bedingte stochastische Unabhängigkeit / Abhängigkeit

Zusätzlich hat de Finetti seine eigene, schwächere Bedingung von "unabhängig und identisch verteilt", die er Austauschbarkeit [exchangeability] nennt. Ich glaube aber, daß dieser Begriff technisch zu anspruchsvoll ist für eine Einführung.

Ich schließe den Artikel mit einer Betrachtung über ein offensichtliches Paradoxon, daß unabhängige, identisch verteilte Beobachtungen nicht schrittweise ein klareres Bild von dem Phänomen ergeben können, das wir studieren. In Baysianischem Rahmen kann dies dadurch aufgelöst werden, daß Unabhängigkeit wirklich meint, *Unabhängigkeit, gegeben den Parameter*. In nicht-Baysianischer Denkweise ist das beste, was man dazu sagen, kann: Unabhängigkeit in diesen Situationen bedeutet die Unabhängigkeit für eine Person, die den Wert des Parameters kennt.

Literatur

Finetti, B. de (1975): *Theory of probability.* vol. 2. - New York: Wiley.

Hodges, Lehman (1970): *Basic concepts of probability and statistics.* - Holden Day.

Kac, M. (1959): *Statistical independence in probability, analysis and number theory.* - New York: Wiley.

Kolmogorov, A.N. (1950): *Foundations of the theory of probability.* - London: Chelsea

Mises, R. v. (1957): *Probability, Statistics and Truth.* - London: Dover.

Rayner, J.C.W. (1993): Assumptions are important: the paired and pooled tests. - In: *Teaching statistics* 15(1), 15-17.