Gedachte Zufallszahlen: Empfundene und wirkliche Zufälligkeit

von *Gottfried E. Noether*, Connecticut; Übersetzung: *Manfred Borovcnik*

Kurzfassung: Die Intuition über Wahrscheinlichkeit ist häufig nicht nur sehr vage, sondern paßt mit theoretischen Vorstellungen nicht zusammen. Ein Musterbeispiel sind gedachte Abhängigkeiten, wo keine sein sollten. So etwa vermeidet man es intuitiv, beim Ersinnen von zufälligen Zahlen zwei gleiche Zahlen hintereinander zu nennen. Ein Klassenexperiment dazu und die Auswertung in einem Vergleich mit simulativen Ergebnissen von Zufallszahlen wird hier vorgestellt.

1. Einleitung und Problemstellung

Zwei Ideen in Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeit sind für ein Verstehen statistischer Beurteilung wesentlich: Die Häufigkeitsinterpretation von Wahrscheinlichkeit und das Konzept von Zufall. Gemeinhin haben Studierende kaum Schwierigkeiten mit der Häufigkeitsinterpretation, insbesondere, wenn man sie auffordert, Computerexperimente zur Simulation von einigen hundert Würfen mit Münzen oder Würfeln durchzuführen und aufzuzeichnen. Die Idee der Zufälligkeit ist da viel komplizierter. Unser intuitives Verstehen von Zufall stimmt nicht mit Zufall auf der Basis des Wahrscheinlichkeitskonzepts überein, welches einem Gutteil der statistischen Beurteilung zugrunde liegt. Das Problem wird in der Literatur ausführlich behandelt, siehe z.B. Wagenaar (1972).

Der vorliegende Aufsatz stellt ein Experiment vor, das leicht in der Klasse durchzuführen ist, welches die Schwierigkeiten aufzeigt, auf die der menschliche Geist stößt, wenn er aufgefordert wird, zufälliges Verhalten im Wahrscheinlichkeitssinn zu imitieren.

In den USA ist eine beliebte Methode, Geld zu verlieren, an einem der zahllosen offiziellen (und inoffiziellen) Zahlenglücksspiele teilzunehmen. Die *Connecticut Daily Number*, welche außer sonntags täglich ausgespielt wird, ist nur ein Beispiel von vielen. Der Spieler wählt eine dreistellige Zahl zwischen 000 und 999. Wenn die Zahl gezogen wird, erhält der Spieler $ 500 für jeden gesetzten Dollar.

Die meisten Studierenden haben im Fernsehen gesehen, wie die Gewinnzahl bestimmt wird. In jeder von drei getrennten Glasurnen werden zehn Tischtennisbälle durch einen Luftstrom aufgewirbelt, bis einer im engen Hals obenauf eingefangen wird. Die drei ausgewählten Ziffern bilden die Zahl des Tages. Nach der Häufigkeitsinterpretation erscheint jede der Ziffern von 0 bis 9 auf lange Sicht in einem Zehntel der Fälle auf jeder der drei Positionen. Zusätzlich, da drei getrennte Urnen benutzt werden, kann das Vorgehen in der einen Urne den Ablauf in den anderen nicht beeinflussen. Auf lange Sicht erscheint daher jede der 1000 möglichen Kombinationen der drei Ziffern gleich häufig, d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$. Dies als Folge der Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse.

2. Gedachte Zufallszahlen - das Klassenexperiment

Um nun Studierenden zu zeigen, daß der menschliche Geist Zufälligkeit nach anderen Gesetzen begreift, fordere ich sie auf, “sich im Kopf eine Folge von Tischtennisbällen auszudenken’. Mentale Auswahl aus zehn Ziffern ist sehr verwirrend. Experimente mit drei gedachten Bällen mit den Beschriftungen 1, 2 und 3 sind da einfacher. Speziell ersuche ich die Studenten, fünf aufeinanderfolgende zufällige Auswahlen aus den drei Ziffern 1, 2 und 3 zu treffen und sie auf ein Blatt Papier zu notieren. Um den Takt vorzugeben, tippe ich mit einem Bleistift ungefähr im Abstand von einer Sekunde auf den Tisch. Bei jedem Takt soll der Student eine der drei Ziffern aufschreiben.

In der Analyse der Daten benutze ich nur die letzten zwei Ziffern. Die ersten drei Ziffern dienen nur dazu, die Studenten einzugewöhnen. Tabelle 1 gibt die Häufigkeiten der neun möglichen Kombinationen der letzten zwei Ziffern wieder (es nahmen 450 Studenten am Experiment teil).

Tabelle 1: Häufigkeiten gedachter Zahlenpaare

		Zweite Ziffer			
		1	2	3	Summe
Erste Ziffer	1	31	72	60	163
	2	57	27	63	147
	3	53	58	29	140
	Summe	141	157	152	450

3. Der Vergleich mit 'wahrer' Zufallsauswahl

Unter den Bedingungen der 'wahren' zufälligen Auswahl wären die neun möglichen Kombinationen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 gleich wahrscheinlich, jede mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$. Die erwarteten Häufigkeiten für jede Zelle betragen demnach 50. Bloße augenfällige Kontrolle zeigt, daß die tatsächlich beobachteten Häufigkeiten für jedes der identischen Paare 11, 22, 33 viel kleiner sind als unter den Bedingungen reiner Zufälligkeit zu erwarten wäre, während die Häufigkeiten für die nicht-identischen Zahlenpaare zu groß sind. Unter den Bedingungen reiner Zufälligkeit und der Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Auswahlen hat ein identisches Paar wie 22 dieselbe Wahrscheinlichkeit wie ein gemischtes Paar wie 21. Aber, in ihrer mentalen Auswahl erinnern sich die Studenten offensichtlich an die eben hingeschriebene Zahl und vermeiden diese dann in ihrer folgenden Auswahl, so daß sie damit ein Element der Abhängigkeit hineintragen in eine Folge von Auswahlen, die als unabhängig unterstellt sind.

Es ist interessant, daß trotz eines Fehlens der Unabhängigkeit in der Auswahl benachbarter Zahlen die Randhäufigkeiten für sowohl die erste als auch die zweite Zahl keine signifikanten Abweichungen von den theoretischen (gleichen) Häufigkeiten anzeigen. Diese augenscheinlichen Schlüsse können mit Hilfe des Chi-Quadrat-Tests bestätigt werden.

Zum Vergleich sind in Tabelle 2 Häufigkeiten angegeben, die mit einer Tabelle von Zufallszahlen gewonnen wurden.

Tabelle 2: Häufigkeiten zufälliger Zahlenpaare

		Zweite Ziffer			
		1	2	3	Summe
Erste Ziffer	1	44	58	50	152
	2	43	48	53	144
	3	55	54	45	154
	Summe	142	160	148	450

Literatur:

Wagenaar, W.A. (1972): Generation of Random Sequences by Human Subjects: A Critical Survey of Literature, *Psychological Bulletin* 77, 65-72.