Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit bei Schülern der Sekundarstufen

von *Richard W. Madsen*, Columbia; Übersetzung: *Manfred Borovcnik*

Kurzfassung: Studierende entwickeln Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit ohne formalen Unterricht im Fach und einige ihrer Vorstellungen sind mit den Konzepten, die dann unterrichtet werden, nicht vereinbar. Eine Studie mit 200 Schülern der Sekundarstufen sollte über diese Vorbegriffe Aufschluß geben. Der Fragebogen und die Ergebnisse werden hier vorgestellt.

1. Einleitung

Lernende werden gelegentlich in der Schule oder über die Medien mit Information konfrontiert, die mit Wahrscheinlichkeit ausgedrückt wird. Sie mögen erfahren, daß Rauchen das Risiko gesundheitlicher Schäden wie Lungenkrebs, Emphysemen oder Herzkrankheiten erhöht; oder, daß der Gebrauch von Sitzgurten im Auto das Risiko schwerer Verletzungen in Falle eines Unfalls verringert. Man erzählt ihnen, daß die Gewinnwahrscheinlichkeit im Lotto klein sei, aber gleichzeitig erinnert man sie daran, daß man gewinnen kann, indem man ihnen Bilder glücklicher Gewinner zeigt. Man erzählt ihnen, daß ungeschützter sexueller Kontakt zu AIDS sowie zu einer Reihe von anderen sexuell übertragbaren Krankheiten führen kann, daß sie aber 'safe sex' praktizieren könnten, wenn sie einen Schutz verwenden, der eine hohe Wahrscheinlichkeit hat, wirksam zu sein. Während es nun wünschenswert ist, die Information mit Wahrscheinlichkeiten auszudrücken, ist es wichtig zu wissen, wie diese Information dann tatsächlich von den Empfängern verstanden wird. Das heißt, es ist wichtig zu wissen, wie Lernende Aussagen über Wahrscheinlichkeit auffassen, wenn sie noch keinen formalen Unterricht dazu hinter sich haben. Des weiteren mag unser Unterricht in Wahrscheinlichkeit wirksamer sein, wenn wir wissen, welche Fehlauffassungen es gibt, so daß sie direkt angesprochen werden können.

Green (1979 und 1983) und Truran (1985) haben das Verständnis von Wahrscheinlichkeit bei jüngeren Lernenden erforscht als ich in meiner Gruppe. Konold (1991) berichtet über Beliefs über Wahrscheinlichkeit bei College-Studenten. Er gründet viele seiner Arbeiten auf direkte Interviews mit Studenten, welche ihm ihre Gedankenprozesse erläutern, während sie bestimmte Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit bearbeiten. Der interessierte Leser sei Kahneman, Slovic und Tversky (1982), oder Garfield und Ahlgren (1988), oder Konold (1989) verwiesen, dort findet sich eine formalere Abhandlung von Modellen, wie Studierende Wahrscheinlichkeit auffassen. In diesen Arbeiten werden einige einschlägige Modelle diskutiert. Ich werde einige davon kurz beschreiben und dann berichten, wie meine Studien diese Modelle stützen.

Eines der Modelle basiert auf der 'Repräsentativität'. Wenn man Personen, die Wahrscheinlichkeit mit Repräsentativität verbinden, nach dem 'wahrscheinlichsten' [most likely] von mehreren Ereignissen fragt, so werden diese ein Ergebnis wählen, das äußerlich repräsentativ erscheint. Zum Beispiel wissen wir, daß in einer Serie von 6 Münzwürfen alle 2^6 Serien von W und Z gleich wahrscheinlich sind. Gibt man eine Auswahl verschiedenster möglicher Serien vor, so werden Lernende oft ein Ergebnis wie WWZ WZZ als wahrscheinlicher als WWW WWW einstufen. Eine mögliche Erklärung liegt darin, daß eine Folge wie WWZ WZZ mit 3 W und 3 Z eher beobachtet werden sollte als eine Folge von 6 W, weil man ja auf lange Sicht die Hälfte Wappen und die Hälfte Zahl erwartet [danach erscheint die gemischte Folge für den Zufall repräsentativer].

Ein anderes Modell basiert auf dem sogenannten 'outcome approach'. Danach wird Wahrscheinlichkeit als Werkzeug betrachtet, mit dem man den Ausgang eines einzelnen Versuchs voraussagen kann; dieser Ausgang wird daher nicht mit relativen Häufigkeiten des Auftretens betrachtet. Wenn man einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit größer als 0.5 zuordnet, dann würde man, folgt man dem 'outcome approach', sagen, das Ereignis wird eintreten, und wenn es nicht eintritt, war die zugeordnete Wahrscheinlichkeit falsch. (In den Nachrichtenmedien wird diese falsche Interpretation häufig benutzt; siehe Madsen (1991)). Zum Beispiel, lautet der Wetterbericht auf 70% Wahrscheinlichkeit für Regen und regnet es nicht, so wird ein Mensch, der dieser Interpretation folgt, die Wetterprognose als falsch einstufen.

Ein weiteres Modell basiert auf gedanklicher Verfügbarkeit oder auf Erfahrung. Danach hängt bei der Bewertung, ob ein Ereignis wahrscheinlich oder unwahrscheinlich ist, die Antwort davon ab, wie leicht man sich ein Beispiel des Ereignisses gedanklich vorstellen kann. Konold (1991) streicht heraus, daß Leute die Gewinnwahrscheinlichkeit in einer Lotterie dadurch bestimmen mögen, daß sie sich an Leute erinnern, die sie kennen und die gewonnen haben. Vermutlich ist dies ein Grund, warum das staatliche Lotto und Lotterien in ihrer Werbung die Namen und Fotos vergangener Gewinner einsetzen.

2. Die Probanden in der Studie

Ich wollte Lernende aus einer Vielfalt von Schulen und Schultypen haben, um deren Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit zu studieren. Die Beobachtungseinheit war keineswegs eine Zufallsauswahl, ich arbeitete mit Lehrern zusammen, die mir persönlich bekannt waren. Insbesondere suchte ich einige meiner früheren Studenten auf, die in der Sekundarstufe unterrichten; schließlich konnte ich Daten an fünf verschiedenen Schulen bekommen, einige in kleinen Städtchen, einige in großen Städten. Die Probanden in der Studie waren zwischen 13 und 19 Jahren. Sie waren in allgemeinen Mathematikklassen und hatten keinen Unterricht in Wahrscheinlichkeit oder Statistik. Obwohl ich selbst an Daten, die auf runden Zahlen basieren, zweifle (das schaut allzu künstlich aus), ist es passiert, daß genau 200 Lernende an der Studie teilnahmen.

Die Anleitung an die Lernenden lautete: 'Eine der Antwortmöglichkeiten ist >Ich weiß nicht=. Bitte kreuze dies an und rate nicht völlig planlos. Jedoch, wenn du eine Idee von einer Antwort hast, z.B. wenn du eine der Möglichkeiten als falsch oder schlecht begründbar einstufst, gib einfach die Antwort, die dir am ehesten richtig erscheint.'

Diese Anleitung sollte die Ergebnisse zuverlässiger machen. Zufällige Antworten und völliges Raten würden uns ja nichts über das Verständnis der Lernenden über Wahrscheinlichkeit erschließen.

3. Der Fragebogen

Angegeben ist nach der Antwortmöglichkeit der Prozentsatz der Antworten, die darauf entfallen, die richtigen Antworten findet man im Anhang. [Die Option 'Ich weiß nicht' lautete im englischen Original 'I am unsure'.]

1. Stell dir vor, du wirfst ein Markstück [a quarter] mehrmals hintereinander, wobei W für das Ergebnis 'die Münze landet mit dem Wappen obenauf' und Z für 'Zahl obenauf' steht. Die Bezeichnung WZ beschreibt dann zwei aufeinander folgende Würfe mit Wappen gefolgt von Zahl. Wenn du die Münze sechs Mal in Serie wirfst, welche der folgenden Abfolgen wirst du am ehesten [most likely] beobachten:
   (a) WZW ZWZ (28.5)
   (b) WWZ ZWW (16)
   (c) WWW WWW (2)
   (d) ZZW ZWZ (4)
   (e) Unter (a)-(d) ist die eine ebenso wahrscheinlich wie die andere (44)

(f) Ich weiß nicht (5.5)

2. Wenn du eine gewöhnliche Münze sechs Mal hintereinander wirfst, welche der folgenden Abfolgen wirst du am ehesten *nicht* beobachten [least likely to observe]:

(a) WZW ZWZ (7.5)
(b) WWZ ZWW (2.5)
(c) WWW WWW (58.5)
(d) ZZW ZWZ (3)
(e) Unter (a)-(d) ist die eine ebenso wahrscheinlich wie die andere (24)
(f) Ich weiß nicht (4.5)

3. Wenn du eine gewöhnliche Münze sechsmal hintereinander wirfst und die Folge ZZZ ZZZ beobachtest, was würdest du dann beim nächsten Wurf erwarten?

(a) W (25)
(b) Z (34.5)
(c) Von (a) und (b) ist eine wie die andere ebenso wahrscheinlich (34)
(d) Ich weiß nicht (5.5)

4. Ein gewöhnlicher Würfel hat eine Fläche mit ‘schwarz’, die anderen Flächen mit ‘gold’ bemalt. Wenn der Würfel einmal geworfen wird, welche Farbe würdest du meinen, wird obenauf liegen?

(a) ‘schwarz’ (7)
(b) ‘gold’ (47)
(c) Die Information reicht nicht aus, um antworten zu können (17.5)
(d) Von (a) und (b) ist eine wie die andere ebenso wahrscheinlich (23)
(e) Ich weiß nicht (5.5)

5. Ein gewöhnlicher Würfel hat eine Seite in ‘schwarz’ angemalt, die anderen in ‘gold’. Wenn der Würfel sechsmal geworfen wird, was würdest du eher beobachten [more likely to observe]:

(a) I: ‘gold’ bei allen sechs Würfen (11)
(b) II: 5mal ‘gold’ und 1mal ‘schwarz’ (37.5)
(c) Die Information reicht nicht aus, um antworten zu können (13.5)
(d) Von (a) und (b) ist eine wie die andere ebenso wahrscheinlich(27.5)
(e) Ich weiß nicht (10.5)

6. Ein fester Körper hat die Gestalt einer kleinen Pyramide mit einem Quadrat von 2 cm Seitenlänge und den anderen vier Seitenflächen als gleichschenke-

lige Dreiecke. Die Basis ist mit der 1 beschriftet, die anderen Flächen mit 2, 3, 4 und 5. Wenn die Pyramide geworfen wird, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß sie auf die 1 landen wird,

(a)	1/5	(40)
(b)	4/3 so wahrscheinlich wie die anderen Seiten	(17.5)
(c)	Die Information reicht nicht aus, um antworten zu können	(11.5)
(d)	Ich weiß nicht	(31)

7. In einem Spiel so ähnlich wie Roulette beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß du gewinnst, wenn du auf eine bestimmte Kombination von Zahlen wettest, 1/20. Wenn du auf diese Kombination in zwei Spielen wettest, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal zu gewinnen,

(a)	1/20	(15.5)
(b)	2/20	(50.5)
(c)	0.0975	(4.5)
(d)	0.0025	(3.5)
(e)	Die Information reicht nicht aus, um antworten zu können	(3.5)
(f)	Ich weiß nicht	(22.5)

8. Bei ihrer Wettervorhersage stellte Linda Frost fest, daß die Chance für Regen am folgenden Tag 90% beträgt. Du hast daraufhin ein geplantes Picknick ausfallen lassen. Am nächsten Tag jedoch war es in der Tat sonnig. Was sagt dir diese Information über Lindas Fähigkeit, das Wetter vorherzusagen?

(a)	Sie ist eine sehr schlechte Vorhersagerin	(11)
(b)	Sie ist wahrscheinlich eine sehr schlechte Vorhersagerin	(19)
(c)	Sie ist eine gute Vorhersagerin, hatte aber Pech	(24.5)
(d)	Die Information reicht nicht aus, um antworten zu können	(34)
(e)	Ich weiß nicht	(11.5)

9. Es wird empfohlen, daß ein Hausmeister Latexhandschuhe trägt, wenn er mit Abfall hantiert, der gesundheitsgefährdende Stoffe enthalten kann. Wenn der Abfall tatsächlich solche Stoffe enthält, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit vollständigen Schutzes durch Tragen der Handschuhe im Laufe eines Jahres 0.98. Bill ist ein Hausmeister, der nur in *der Hälfte der Zeit* daran denkt, die Handschuhe zu verwenden. Wenn gesundheitsgefährdende Stoffe da sind, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für vollständigen Schutz für Bill im Laufe eines Jahres:

(a)	0.98	(6.5)

(b) 0.96 (4.5)
(c) 0.98 (5.5)
(d) 0.49 (48.5)
(e) 0.02 (2)
(f) 0.01 (0)
(g) 0 (3.5)
(h) Ich weiß nicht (28.5)

10. Operationsmasken können Besucher vor der Ansteckung einer Krankheit des Patienten schützen, etwa bei infektiöser Tuberkulose. Der Erzeuger solcher Masken behauptet, daß die Maske den Benützer vor der Ansteckung mit Wahrscheinlichkeit 0.95 schützt, jedes Mal, wenn der Kontakt mit Kranken erfolgt und dabei die Maske benützt wird. Angenommen einer deiner Freunde benutzte bei einem einzigen Besuch eine solche Schutzmaske und wurde dennoch mit der Krankheit infiziert. Aus dieser Kenntnis heraus, würdest du sagen,
    (a) die Behauptung des Erzeugers war zu hoch gegriffen (25)
    (b) dein Freund benutzte die Maske nicht wirklich, denn sonst hätte er sich die Krankheit nicht zugezogen (14)
    (c) Die Information reicht nicht aus, um antworten zu können (33)
    (d) Ich weiß nicht (28)

11. Angenommen, die Behauptung des Erzeugers (daß jedes Mal, wenn die Schutzmaske getragen wird, sie den Benützer mit Wahrscheinlichkeit 0.95 schützt) trifft wirklich zu. Wenn einhundert Krankenschwestern diese Maske im Vertrauen auf ihre Wirksamkeit bei der Behandlung von Patienten benützen und sie diese täglich behandeln, werden nach einem Jahr
    (a) 95 von ihnen von der Krankheit verschont geblieben sein
    (b) zwischen 92 und 98 von ihnen (ungefähr 95"3) (19)
    von der Krankheit verschont geblieben sein (28)
    (c) beträchtlich weniger als 95 von ihnen von der Krankheit verschont geblieben sein (14)
    (d) Ich weiß nicht (39)

4. Die Antworten

Der Test umfaßte 13 Fragen, der Fragebogen hier hat aus Platzgründen nur 11. Die als richtig eingestuften Antworten sind im Anhang angegeben. Der Prozentsatz der Antworten wird in Klammern rechts von jeder Auswahlantwort angegeben. Einige

Kommentare über die häufigsten Antworten werden in diesem Abschnitt gegeben.

Bei Frage 1 wählten fast die Hälfte der Lernenden die Antworten (a) oder (b), jede davon hat 3 W und 3 Z in ihrer Folge. Das zeigt an, daß viele von ihnen die Repräsentativität der Folge beurteilten, danach spiegeln diese Folgen die Wahrscheinlichkeit besser wider. In Frage 2 wurde die Antwort (c) mit den 6 W in mehr als der Hälfte gewählt, möglicherweise mit der Vorstellung verbunden, daß dies die am wenigsten repräsentative und damit am wenigsten wahrscheinliche Folge ist. Es ist bemerkenswert, daß 49 der 88 Personen, die auf Frage 1 mit 'das eine ist ebenso wahrscheinlich wie das andere' (Option e) antworteten, in Frage 2 *nicht* dieselbe Antwort gaben. Tatsächlich wählten nämlich 39 davon Antwort (c) und nicht (e). Diese Inkonsistenz zeigt an, daß einige Probanden die Aussage 'das eine ist ebenso wahrscheinlich wie das andere' nicht so interpretiert haben mögen, als ob jede der angegebenen Möglichkeiten dieselbe Wahrscheinlichkeit hätte. Auch die Antworten zu Frage 3 zeigen an, daß Probanden die Ausgänge bei aufeinander folgenden Würfen nicht als unabhängig auffassen, weil nur etwa ein Drittel von ihnen Antwort (c) wählt.

Bei Frage 4 war ich erstaunt, daß nur 47% zu Recht 'gold' als ihre beste Einschätzung, was obenauf erscheinen würde, wählten. Es mag sein, daß einige derer, die mit 'das eine ist ebenso wahrscheinlich wie das andere' (Option d) antworteten, nicht wirklich 'gleich wahrscheinlich' im Sinn hatten, sondern schlicht meinten, daß das eine wie das andere eine [von zwei unsicheren] Möglichkeiten darstellt. [Diese Fehlauffassung, wonach bei Auftreten von mehreren Möglichkeiten, bei denen man aber nicht sicher sein kann, welche letztlich beim tatsächlichen Versuch eintreten wird, eine Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet wird, kann man auch dem 'outcome approach' zuordnen: Es ist - gleicherweise - unmöglich, das eine oder andere vorauszusagen. Dabei wird Wahrscheinlichkeit - als unterschiedliche Gewichtung für die Möglichkeiten - noch gar nicht in Betracht gezogen.] Frage 5 bezieht sich auf denselben Kontext wie Frage 4. Es war nicht zu erwarten, daß die Probanden die Binomialverteilung anwendeten und exakte Wahrscheinlichkeiten berechneten. Wenn die Probanden 'proportional' denken, können sie folgern, daß 5 von 6 Seiten 'gold' zeigen und daher 5 von 6 Ausgängen mit 'gold' enden sollten. Jene, die den Ausgang für jeden Wurf voraussagen wollen, könnten folgern, daß 'gold' für jeden Wurf am wahrscheinlichsten ist und daher 'gold' bei jedem Wurf vorausgesagt werden und auch eintreten sollte. Tatsächlich hatten von den 22, die antworteten, daß es wahrscheinlicher wäre, 6mal 'gold' zu beobachten (als 5mal 'gold' und einmal 'schwarz'), 16 Probanden korrekt auf Frage 4 mit 'gold' als wahrscheinlichstes Ergebnis geantwortet.

Bei Frage 6 benutzten 40% das Prinzip ‘gleich wahrscheinlicher Ausgänge’ trotz des Umstands, daß die Seiten unterschiedlich waren (und sie kannten die Geometrie des Objekts). [Auch hier wohl möglicherweise dieselbe Unmöglichkeit, genaue Voraussagen zu treffen, und nach dem outcome approach daher ‘gleich unmöglich, vorherzusagen’, also ‘gleich wahrscheinlich’, wie bei Frage 4 angedeutet.] Bei Frage 7 würde ich nicht bei vielen Probanden erwarten, daß sie die Unabhängigkeit und Komplemente in ihrer Antwort verwenden. In ihrer Antwort, daß durch Verdoppeln der Zahl der Spiele sich die Gewinnwahrscheinlichkeit verdoppelt, haben die Probanden nicht daran gedacht, was bei Verallgemeinerung ihrer Idee etwa bei 20 oder mehr Spielen passiert.

Fragen 8 und 10 sind Geschichten in verschiedenen Kontexten, welche unterschiedliche mögliche Antworten erlauben, damit man erkennen kann, ob Probanden eine Antwort geben, die den ‘outcome approach’ widerspiegelt. Zum Beispiel wird, wenn eine unterstellte Wahrscheinlichkeit groß ist (insbesondere größer als 0.5), nach diesem Zugang dies umgedeutet, daß ein Ereignis eintreten *wird*. Wenn es dann nicht eintritt, dann muß die angegebene Wahrscheinlichkeit falsch sein. Bei diesen zwei Fragen wählten 106 Probanden eine Antwort, die diesen ‘outcome approach’ zumindest einmal trifft.

Zusätzlich zur Schwierigkeit, Wahrscheinlichkeit auf den Ausgang einzelner Versuche anzuwenden, fassen Leute oft auch mehrfache Versuche falsch auf. In Frage 9 etwa, wenn gesundheitsschädigende Abfälle dabei sind und Bill gleichzeitig seine Schutzhandschuhe nicht trägt, so ist er ungeschützt und seine Wahrscheinlichkeit für den Schutz beträgt Null. Wenn er nur die Hälfte der Zeit Handschuhe trägt, so beträgt seine Wahrscheinlichkeit geschützt zu sein, Null. Jedoch 48.5% der Probanden geben als Antwort die Hälfte des ursprünglichen Werts. [Hier läßt der Autor, zu Unrecht, die Höhe des Risikos außer acht, d.h., er müßte eigentlich berücksichtigen, mit welcher Häufigkeit diese Schadstoffe im Abfall vorkommen. Ist dies nämlich sehr selten, so könnte der vergeßliche Hausmeister dieser Gefährdung durch reinen ‘Zufall’ entkommen - die Wahrscheinlichkeit, geschützt zu sein ist daher *nicht* Null. Dies zeigt, daß die Aufgabe überaus schwierig ist und viele Probanden eigentlich auf Ersatzantworten ausweichen.]

Ähnlich in Frage 11, wo die Annahme unterstellt wird, daß Krankenschwestern einen Schutz vor Infektionen pro Tag von 95% haben, falls sie der Ansteckung ausgesetzt sind und die Schutzmaske tragen. Bei fortgesetzter Exposition wird die Wahrscheinlichkeit des Schutzes erheblich reduziert, daher beträgt die Zahl derer, die übers Jahr hinweg geschützt sind, beträchtlich weniger als 95 (von 100). Nur 14% wählten diese Antwort. Beachten Sie, daß eine Krankenschwester, die diesem

Risiko an 200 Tagen im Jahr ausgesetzt ist, eine Wahrscheinlichkeit für den Schutz von $0.95^{200} = 0.000\ 035$ hat.

Bei der Durchsicht der Antworten der Probanden auf diese Fragen finden wir, daß Personen ohne formalen Unterricht in Wahrscheinlichkeit tatsächlich so etwas wie eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit haben. Obwohl die Probanden bei jeder Frage die Option 'ich weiß nicht' hatten, machten nur wenige davon Gebrauch. Wir könnten dies so interpretieren, daß die Probanden glaubten, ihre Sichtweise von Wahrscheinlichkeit wäre korrekt, obwohl ihre Antwort das Gegenteil offenbart. Dadurch, daß Lehrende Anhaltspunkte bekommen, worin die intuitiven Vorstellungen bestehen, können sie Lernenden zeigen, wo deren Ideen im Widerspruch zu den akzeptierten Definitionen der Begriffe stehen, wodurch der Unterricht insgesamt wirksamer wird.

Literatur:

Garfield, J. und Ahlgren, A. (1988): Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research, *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 44-63.

Green, D.R. (1979): The Chance and Probability Concepts Project, *Teaching Statistics* 1 (3), 66-71.

Green, D.R. (1983): School Pupils' Probability Concepts, *Teaching Statistics* 5 (2), 34-42.

Konold, C. (1991): Understanding Students' Beliefs about Probability, in: von Glasersfeld, E. (Hrsg.): *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer, 139-156.

Kahneman, D., Slovic, P. und Tversky, A. (Hrsg.) (1982): *Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Madsen, R. (1991): Earthquakes and Snowstorms: Judging Probability Statements, *Stats* 5, 7-10.

Truran, J. (1985): Children's Understanding of Symmetry, *Teaching Statistics* 7 (3), 69-74.

Anhang: Lösungen und Prozentsatz der richtigen Antworten

1. (e) 44	2. (e) 24	3. (c) 34	4. (b) 47	5. (b) 37.5	6. (c) 11.5
7. (c) 4.5	8.(d) 34	9. (g) 3.5	10. (c) 33	11. (c) 14%	