Anmerkungen zur Behandlung der Normalverteilung im Mathematikunterricht

von Gunter Stein, Darmstadt

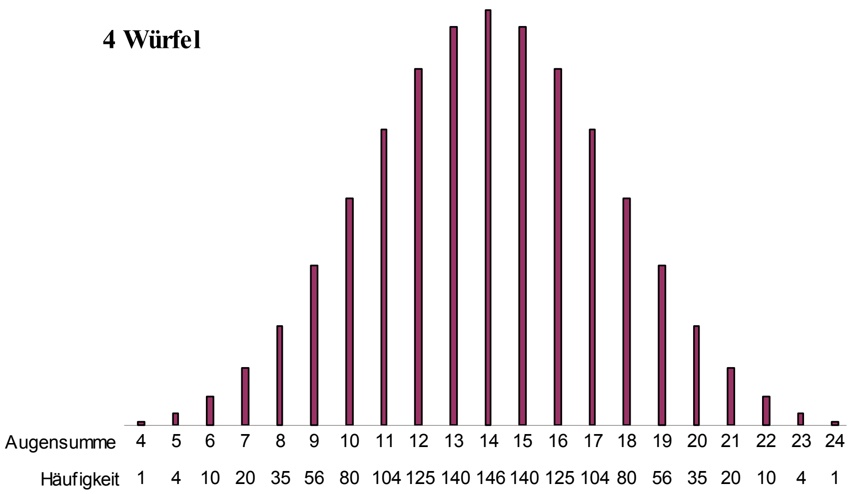
Einleitung: Bei der Diskussion, ob im Mathematikunterricht ein bestimmter Stoff behandelt werden sollte, kann es durchaus wohlbegründete, unterschiedliche Meinungen geben, je nachdem, ob innermathematische Wichtigkeitsgründe, Anwendungsaspekte oder Lernprozesse bei Schülern im Vordergrund stehen. Auch die Computerentwicklung kann den Diskussionsstand beeinflussen: Tischrechner und programmierbare Taschenrechner, die von Jahr zu Jahr leistungsfähiger werden, können Inhalte und Ziele des Mathematikunterrichts beeinflussen. Dies gilt auch für die Normalverteilung, die im Stochastikunterricht im wesentlichen bei zwei Themenkreisen auftaucht: Beim Zentralen Grenzwertsatz und beim Hypothesentesten; als normale Approximation von Verteilungen und Testgrößen ist sie m.E. durch die Computer überflüssig geworden.

Zentraler Grenzwertsatz

Die Normalverteilung tritt überall dort auf, wo mehrere unabhängige Faktoren durch Addition die Werte einer Zufallsvariablen bestimmen. Beispiele dafür finden sich häufig bei natürlichen Vorgängen, wo etwa Wachstum, Lebensdauer, Länge oder Gewicht von Individuen durch Überlagerung sehr vieler Faktoren bestimmt werden, wie etwa Erbanlagen, Ernährung vor und nach der Geburt sowie verschiedener Umwelteinflüsse. Wenn eine vom Zufall gesteuerte Größe zustande kommt als Summe vieler kleiner unabhängiger Einflüsse, so ist sie annähernd normalverteilt. Im Unterricht läßt sich dieser Sachverhalt am Galtonbrett veranschaulichen oder anhand der Verteilung der Augensumme bei mehreren Würfeln:

3 Würfel

							(6,3,1)	(6,4,1)							
							(6,2,2)	(6,3,2)							
						(6,2,1)	(6,1,3)	(6,2,3)	(6,5,1)						
						(6,1,2)	(5,4,1)	(6,1,4)	(6,4,2)						
						(5,3,1)	(5,3,2)	(5,5,1)	(6,3,3)						
						(5,2,2)	(5,2,3)	(5,4,2)	(6,2,4)						
					(6,1,1)	(5,1,3)	(5,1,4)	(5,3,3)	(6,1,5)	(6,6,1)					
					(5,2,1)	(4,4,1)	(4,5,1)	(5,2,4)	(5,6,1)	(6,5,2)					
					(5,1,2)	(4,3,2)	(4,4,2)	(5,1,5)	(5,5,2)	(6,4,3)					
					(4,3,1)	(4,2,3)	(4,3,3)	(4,6,1)	(5,4,3)	(6,3,4)					
					(4,2,2)	(4,1,4)	(4,2,4)	(4,5,2)	(5,3,4)	(6,2,5)					
					(4,1,3)	(3,5,1)	(4,1,5)	(4,4,3)	(5,2,5)	(6,1,6)					
				(5,1,1)	(3,4,1)	(3,4,2)	(3,6,1)	(4,3,4)	(5,1,6)	(5,6,2)	(6,6,2)				
				(4,2,1)	(3,3,2)	(3,3,3)	(3,5,2)	(4,2,5)	(4,6,2)	(5,5,3)	(6,5,3)				
				(4,1,2)	(3,2,3)	(3,2,4)	(3,4,3)	(4,1,6)	(4,5,3)	(5,4,4)	(6,4,4)				
				(3,3,1)	(3,1,4)	(3,1,5)	(3,3,4)	(3,6,2)	(4,4,4)	(5,3,5)	(6,3,5)				
				(3,2,2)	(2,5,1)	(2,6,1)	(3,2,5)	(3,5,3)	(4,3,5)	(5,2,6)	(6,2,6)				
			(4,1,1)	(3,1,3)	(2,4,2)	(2,5,2)	(3,1,6)	(3,4,4)	(4,2,6)	(4,6,3)	(5,6,3)	(6,6,3)			
			(3,2,1)	(2,4,1)	(2,3,3)	(2,4,3)	(2,6,2)	(3,3,5)	(3,6,3)	(4,5,4)	(5,5,4)	(6,5,4)			
			(3,1,2)	(2,3,2)	(2,2,4)	(2,3,4)	(2,5,3)	(3,2,6)	(3,5,4)	(4,4,5)	(5,4,5)	(6,4,5)			
			(2,3,1)	(2,2,3)	(2,1,5)	(2,2,5)	(2,4,4)	(2,6,3)	(3,4,5)	(4,3,6)	(5,3,6)	(6,3,6)			
		(3,1,1)	(2,2,2)	(2,1,4)	(1,6,1)	(2,1,6)	(2,3,5)	(2,5,4)	(3,3,6)	(3,6,4)	(4,6,4)	(5,6,4)	(6,6,4)		
		(2,2,1)	(2,1,3)	(1,5,1)	(1,5,2)	(1,6,2)	(2,2,6)	(2,4,5)	(2,6,4)	(3,5,5)	(4,5,5)	(5,5,5)	(6,5,5)		
		(2,1,2)	(1,4,1)	(1,4,2)	(1,4,3)	(1,5,3)	(1,6,3)	(2,3,6)	(2,5,5)	(3,4,6)	(4,4,6)	(5,4,6)	(6,4,6)		
	(2,1,1)	(1,3,1)	(1,3,2)	(1,3,3)	(1,3,4)	(1,4,4)	(1,5,4)	(1,6,4)	(2,4,6)	(2,6,5)	(3,6,5)	(4,6,5)	(5,6,5)	(6,6,5)	
	(1,2,1)	(1,2,2)	(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,5)	(1,4,5)	(1,5,5)	(1,6,5)	(2,5,6)	(3,5,6)	(4,5,6)	(5,5,6)	(6,5,6)	
(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(1,1,4)	(1,1,5)	(1,1,6)	(1,2,6)	(1,3,6)	(1,4,6)	(1,5,6)	(1,6,6)	(2,6,6)	(3,6,6)	(4,6,6)	(5,6,6)	(6,6,6)
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18



Schon bei 3 bzw. 4 Würfeln ist die glockenförmige Verteilung zu erkennen. Auf diesem Niveau ist die Normalverteilung schon im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I behandelbar – und auf dem neuen 10 DM-Schein für Schüler verständlich.

Die 250jährige Geschichte der Normalverteilung begann 1733 mit einer Schrift von Abraham de Moivre mit Überlegungen zu Glücksspielen; in der Astronomie wurde die Normalverteilung in der Gauß-Laplaceschen Fehlerkurve wiederentdeckt, sie spielt in der Biometrie von Adolphe-Lambert Quetelet eine wichtige Rolle und Galton beschrieb sie als wundervolle Form kosmischer Ordnung. Diese historische Entwicklung zusammen mit philosophischen und wissenschaftstheoretischen Aspekten können m.E. den Stochastikunterricht ganz wesentlich bereichern (vgl. Wallis und Roberts 1975, 296ff).

Hypothesentesten

Die Bedeutung der Normalverteilung zur Approximation der Binomialverteilung und als Grenzverteilung von Testgrößen stammt aus einer Zeit, als noch keine Computer zur Verfügung standen. Das nebenstehende Programm aus Engel (1987) berechnet die binomische Wahrscheinlichkeit

```
 10 INPUT N,P,C,D:M=N+1:Q=1-P
 20 R=LOG(P/Q):L=N*LOG(Q)
 25 IF C=0 THEN 60
 30 FOR X=1 TO C              ←berechnet
 40   L=L+R+LOG(M/X-1)          ln b(c)
 50 NEXT X
 60 S=EXP(L)                  ←berechnet
 70 FOR X=C+1 TO D              b(c)
 80   L=L+R+LOG(M/X-1)        ←berechnet
 90   S=S+EXP(L)                b(c)+...+b(d)
100 NEXT X
110 PRINT S
```

$$b(c)+b(c+1)+...+b(d) \text{ mit } b(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.$$

Alle im Zusammenhang mit der Binomialverteilung auftretenden Probleme, insbesondere beim Hypothesentesten sind mit diesem auch sonst sehr lehrreichen Programm zu lösen. Auch die (beliebig genaue!) Bestimmung von Vertrauensintervallen ist durch ein Probierverfahren möglich: Bei vorgegebenem Stichprobenumfang und –ergebnis wird durch Eingabe verschiedener Werte von p versucht, die Intervallgrenzen möglichst exakt zu bestimmen (Engel 1987, 90).

Auch wenn man mit einer 2σ-Umgebung, $\sigma=\sqrt{[np(1-p)]}$, um den Erwartungswert $\mu=np$ argumentieren will, braucht man keine normale Approximation: Man teilt den Schülern – ebenso wie bei der Normalverteilung – mit, daß für große n bei der Binomialverteilung ungefähr 95% aller Ausfälle im Intervall $\mu\pm2\sigma$ liegen, oder führt dies anhand von Beispielen mit dem Computerprogramm vor. Warum sollte man die schwierige Testtheorie belasten mit dem Übergang zu einer nicht einfach zu verstehenden stetigen Verteilung, mit der man dann nichts weiter anfangen kann als aus Tabellen Flächenanteile zu entnehmen?

Ebenfalls bei Engel (1987, 166-182) finden sich Programme, die beim Vorzeichen-Rangsummentest und beim Zweistichprobentest von Wilcoxon-Mann-Whitney die Annahme über die Normalverteilung der Testgröße überflüssig machen, da – unter sehr schwachen Voraussetzungen – die Testgrößenverteilung exakt berechnet werden kann. Die beiden folgenden Programme berechnen die Wahrscheinlichkeit für alle noch extremeren Testwerte T bzw. U als die aus den Stichproben (Umfang N bzw. M und N, $M\leq N$) bestimmten.

```
10 INPUT T, N :U=T+1 :DIM Q(U,N)
20   FOR J=0 TO U :Q(J,0)=1 :NEXT
30 FOR I=1 TO N
40   FOR J=0 TO U
50    IF J<I THEN Q(J,I)=Q(J,I-1)
      :GOTO 70
60    Q(J,I)=Q(J,I-1)+Q(J-I,I-1)
70   NEXT J
80 NEXT I
90 PRINT Q(T,N)/2^N, Q(U,N)/2^N
```

```
INPUT U,M,N:DIM W(U,M)
FOR Z=0 TO U
 FOR X=0 TO M
  W(Z,X)=1
 NEXT X
NEXT Z
FOR Y=1 TO N
 FOR X=1 TO M
  FOR Z=1 TO U
   W(Z,X)=W(Z,X)+W(Z-Y,X-1)
  NEXT Z
 NEXT X
NEXT Y
PRINT W(U,M)
```

In einem Stochastikkurs kann man daher – falls ein Tischrechner bzw. programmierbarer Taschenrechner zur Verfügung steht – auch bei den Testgrößen des Rangsummentests und des Zweistichprobentests von Wilcoxon-Mann-Whitney auf die Normalverteilung verzichten. Auch die üblichen parametrischen Testverfahren scheinen sich im Zeitalter der Computer überlebt zu haben (Engel 1987, 183):

„Die klassischen statistischen Methoden wurden zwischen 1800 und 1930 entwickelt, als Rechnen langsam und teuer war. Heute ist das Rechnen schnell und billig, beides hat sich um den Faktor 10^6 verändert. Dadurch wird es möglich, Standardannahmen über die Daten, z.B. Normalverteilung, durch aufwendige Rechnungen zu ersetzen. Die wichtigste rechenintensive Methode ist die Bootstrap-Methode. Durch Ziehen mit Zurücklegen werden einer n-Stichprobe 1000 (oder mehr) weitere künstliche Stichproben entnommen, und die Variabilität dieser sogenannten Bootstrap-Stichproben wird untersucht. Dadurch wird die in einer Stichprobe steckende Information viel besser ausgewertet als bei den klassischen Methoden, die im wesentlichen nur den Mittelwert der Stichprobe berechnen und den Rest der Information wegwerfen.“

Literatur

Engel, A. (1987): *Stochastik.* Stuttgart: Klett

Wallis u. Roberts (1975) : *Methoden der Statistik*. Reinbek: Rowohlt